



توزیع نرمال (طبیعی، بهنجار، زنگی)

اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع چگالی احتمال به صورت زیر باشد می‌گوییم X دارای توزیع نرمال است:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

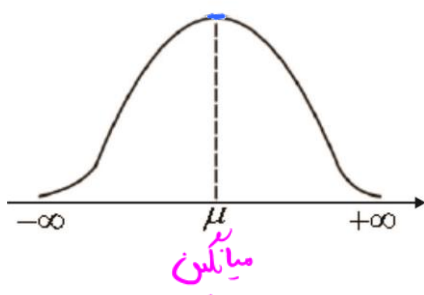
اگر X دارای توزیع نرمال با تابع چگالی احتمال فوق باشد آن‌گاه:

$$E(X) = \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2$$

در حالتی که X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد می‌نویسیم:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

منحنی توزیع نرمال به صورت زیر است:



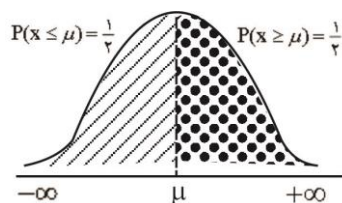
نرمال
(واریانس و میانگین)
 $X \sim N$

خواص توزیع نرمال:

۱- سطح زیر منحنی نرمال برابر ۱ است.

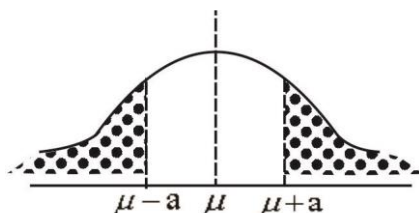
۲- در توزیع نرمال میانگین، میانه و مد با هم برابر است.

۳- توزیع نرمال نسبت به خط $x = \mu$ دارای تقارن است.



$$P(x \leq \mu - a) = P(x \geq \mu + a)$$

۴-





۵- اگر چند توزیع نرمال را با هم جمع کنیم، حاصل نیز دارای توزیع نرمال است.

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) \\ Z = ax + bY \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Z \text{ میانگین} = a\mu_X + b\mu_Y \\ Z \text{ واریانس} = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 \end{array}$$

تمرین: (دکتری - ۹۴) فرض کنید $X_1, X_2, X_3 \sim N(5, 3)$ هستند متغیر Y را به صورت تعریف می کنیم:

$$Y = 2X_1 - 5X_2 + 3X_3, \text{ توزیع } Y \text{ کدام است؟}$$

$$N(0, 114) \quad (4) \quad \checkmark$$

$$N(0, 100) \quad (3)$$

$$N(0, 12) \quad (2)$$

$$N(0, 10) \quad (1)$$

$$\underline{\text{حل}} \quad X_1 \sim N(5, 3)$$

$$X_2 \sim N(5, 3)$$

$$X_3 \sim N(5, 3)$$

$$Y = 2X_1 - 5X_2 + 3X_3$$

$$\underline{\text{میانگین}} \quad Y = 2(5) - 5(5) + 3(5) = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{واریانس}} \quad Y &= 2^2(3) + (-5)^2(3) + 3^2(3) \\ &= 12 + 75 + 27 = 114 \end{aligned}$$

$$Y \sim N(0, 114)$$



توزیع نرمال استاندارد:

اگر در یک متغیر تصادفی نرمال $\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ آن را نرمال استاندارد نامیده و با Z نام گذاری می کنیم.

$$Z \sim N(0, 1)$$

نکته: برای پاسخ به سؤالات توزیع نرمال معمولاً آن را استاندارد می کنیم یعنی طرفین نامساوی را منهای میانگین کرده و تقسیم بر انحراف معیار می کنیم.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} = Z$$

(میانگین و واریانس)

$$\frac{X - \text{میانگین}}{\text{انحراف معیار}} = \text{نرمال استاندارد}$$

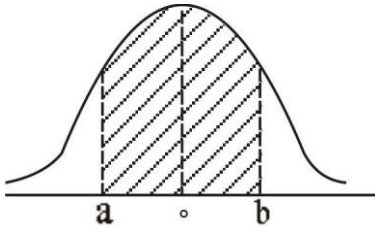




نمایش‌های مختلف در توزیع نرمال استاندارد:

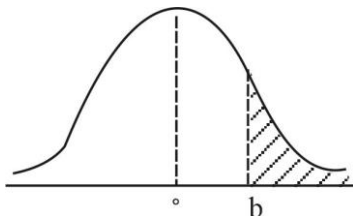
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

حالت اول:



$$P(x \geq b) = S_b^{+\infty} \text{ یا } \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

حالت دوم:

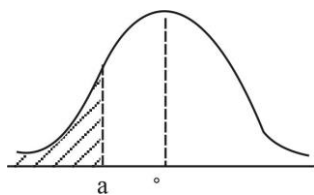


در این حالت اگر گفته باشد $Z_{0.228} = 2$ یعنی احتمال این که Z بیشتر یا مساوی ۲ باشد برابر ۰/۰۲۲۸ است. بنابراین اگر عدد جلوی Z یک عدد مثبت باشد اندیس Z احتمال بزرگ‌تر از عدد را نشان می‌دهد.



$$P(x \leq a) = S_{-\infty}^a f(x)dx \quad \text{یا} \quad \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

حالت سوم:



در این حالت اگر گفته باشد $Z_{0.228} = -2$ یعنی احتمال این که Z کمتر یا مساوی -2 باشد برابر 0.228 است. بنابراین اگر عدد جلوی Z یک عدد منفی باشد اندیس Z احتمال کوچکتر از عدد را نشان می‌دهد.

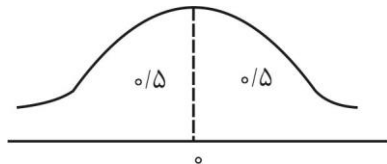




نکات مهم در پاسخ به سؤالات نرمال:

۱- حواسمان باشد هر نامساوی داده شده را استاندارد کنیم.

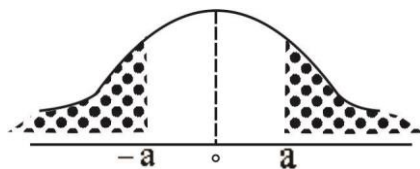
۲- در توزیع نرمال استاندارد $P(z \geq 0) = P(z \leq 0) = 0.5$



۳- برای هر سوال با توجه به احتمال خواسته شده و احتمال داده شده نمودار نرمال را رسم و احتمال‌ها را در قسمت‌های مربوطه بنویسید.

$$P(x \leq -a) = P(x \geq a)$$

۴- حواسمان به تقارن نمودار نرمال باشد. یعنی:



$P(Z > \text{عدد}) = \text{عدد}$
 عدد
 از محور منفی می شود

مساحت زیر منحنی = احتمال



تمرین: (دکتری - ۹۳) اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 و در توزیع نرمال استاندارد $P(Z > 1/96) = 0.025$ باشد، آن گاه $P(\mu - 1/96\sigma < X < \mu)$ برابر است با:

۰/۹۷۵ (۴)

۰/۴۷۵ (۳) ✓

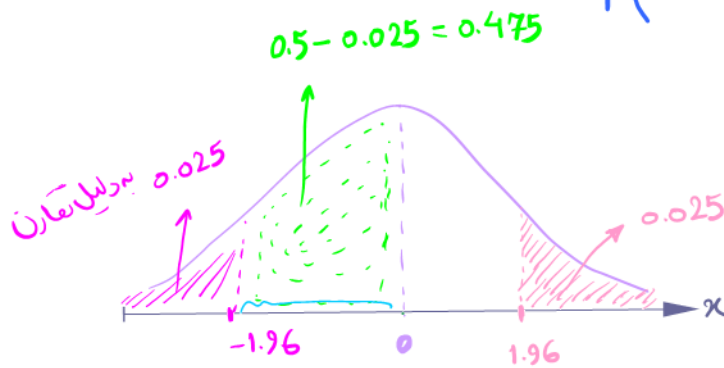
۰/۴۵ (۲)

۰/۹۵ (۱)

* نکته: هم سوالات توزیع نرمال باید استاندارد شوند. یعنی برای میانگین و سیم برای ازلت حیار.

حل
$$P(\mu - 1.96\sigma < X < \mu) = P\left(\frac{\mu - 1.96\sigma - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P(-1.96 < Z < 0) = 0.475$$





تمرین: (دکتری - ۹۷) می‌دانیم توزیع قد دانش‌آموزان یک مدرسه با میانگین ۱۷۰ سانتی‌متر و انحراف معیار ۵ سانتی‌متر **نرمال** است. اگر به صورت تصادفی با یکی از دانش‌آموزان این مدرسه برخورد کنیم، احتمال این که قد او

بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی‌متر باشد چقدر است؟ (در توزیع نرمال استاندارد) ($P(z \geq 2) \approx 0.02$, $P(z \leq 1) \approx 0.84$)

۰/۸۴ (۴)

۰/۸۲ (۳)

۰/۴۷ (۲) ✓

۰/۴۵ (۱)

(حل)

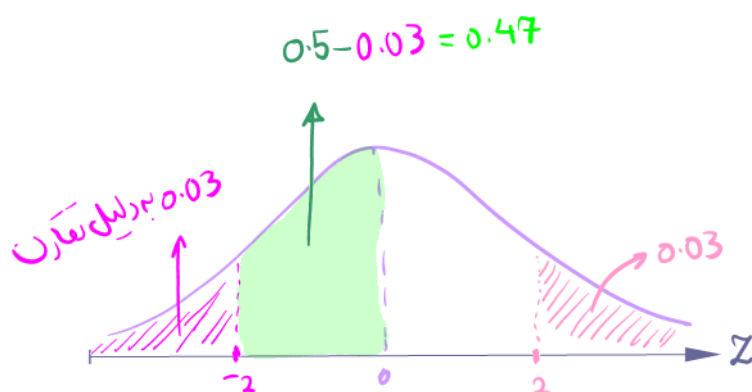
میانگین = ۱۷۰

اندازه قد دانش‌آموزان = X

انحراف معیار = ۵

 $P(160 < X < 170) = ?$

$$P\left(\frac{160-170}{5} < \frac{X-170}{5} < \frac{170-170}{5}\right) = P(-2 < Z < 0) = 0.47$$



مساحت زیر منحنی در سمت چپ = ۰.۵



تمرین: (دکتری - ۹۲) اگر اندازه دو عضو از جامعه نرمالی ۱۳ و ۱۹ و اندازه این دو بر حسب متغیر استاندارد Z، صفر و ۳ باشد، میانگین و انحراف معیار به ترتیب از چپ به راست کدامند؟

$$(۴) (۱۹) (۲)$$

$$(۳) (۳) (۶)$$

$$(۲) (۲) (۱۳)$$

$$(۱) (۳) (۱۹)$$

استاندارد کردن

$$\frac{13 - \mu}{\sigma} = 0$$

استاندارد کردن

$$\frac{19 - \mu}{\sigma} = 3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{13 - \mu}{\sigma} = 0 \Rightarrow 13 - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 13 \\ \frac{19 - \mu}{\sigma} = 3 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \frac{19 - 13}{\sigma} = 3$$

$$\sigma = 36$$

$$\sigma = 2$$



تمرین: (ارشد - ۹۷) متغیر X دارای یک توزیع نرمال است. اگر $P(X \leq 25) = P(Z \leq 1/5)$ و $P(X \geq 19) = P(Z \geq -0.9)$ آن گاه میانگین و انحراف معیار این توزیع کدام است؟

۵، ۲۲ ✗

۲/۴، ۲۱ ✗

۲/۵، ۲۱/۲۵ (۲) ✓

۲/۵، ۲۲/۵ (۱)

حله $P(X \leq 25) = P(Z \leq 1.5)$

استاندارد کردن (از ۲۵ به ۱.۵)
استاندارد کردن (از ۱.۵ به ۲۵)

$P(X \geq 19) = P(Z \geq -0.9)$

استاندارد کردن (از ۱۹ به -۰.۹)
استاندارد کردن (از -۰.۹ به ۱۹)

$$\frac{25 - \mu}{\sigma} = 1.5$$

↓

$$\frac{19 - \mu}{\sigma} = -0.9$$

↓

$$\begin{cases} 25 - \mu = 1.5\sigma \\ 19 - \mu = -0.9\sigma \end{cases}$$

$$6 = 2.4\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{6}{2.4} = 2.5$$

$$\begin{cases} 25 - \mu = 1.5\sigma \\ 19 - \mu = -0.9\sigma \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{25 - \mu}{19 - \mu} = \frac{1.5\sigma}{-0.9\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{25 - \mu}{19 - \mu} = -\frac{5}{3} \Rightarrow 75 - 3\mu = -95 + 5\mu$$

$$8\mu = 170 \Rightarrow \mu = \frac{170}{8} = 21.25$$



توزیع پواسون $\lambda = 8$ میانگین $\Rightarrow$ واریانس $\Rightarrow \sqrt{8}$ = اعراض معیار

تقریب نرمال برای توزیع پواسون:

اگر در توزیع پواسون میانگین بیشتر از ۱۰ باشد می‌توانیم از توزیع نرمال برای حل مسأله استفاده کنیم. با توجه به این که در توزیع پواسون میانگین و واریانس برابر λ است لذا برای استاندارد کردن باید طرفین نامساوی را منهای λ

کرده و سپس تقسیم بر $\sqrt{\lambda}$ کنیم. $P(X > عدد) = P(Z > \frac{عدد - \lambda}{\sqrt{\lambda}}) = P(Z > \frac{عدد - 8}{\sqrt{8}})$

تقریب نرمال برای توزیع دو جمله‌ای:

اگر در توزیع دو جمله‌ای $P = \frac{1}{2}$ یا np و nq بیشتر از ۵ باشند می‌توانیم از توزیع نرمال برای حل مسأله استفاده کنیم. با توجه به این که در توزیع دو جمله‌ای میانگین برابر np و واریانس برابر npq است لذا برای استاندارد کردن باید طرفین نامساوی را منهای np کرده و سپس تقسیم بر $\sqrt{npq}$ کنیم.

نکته: اگر بخواهیم برای حل مسائل مربوط به توزیع پواسون و توزیع دو جمله‌ای از تقریب نرمال استفاده کنیم، قبل از استاندارد کردن باید تصحیح پیوستگی کنیم یعنی نیم واحد اضافه یا کم کنیم.

$$\begin{aligned} P(x = a) &= P(a - 0.5 < x < a + 0.5) \\ P(x \geq a) &= P(x \geq a - 0.5) \\ P(x > a) &= P(x \geq a + 0.5) \\ P(x \leq a) &= P(x \leq a + 0.5) \\ P(x < a) &= P(x \leq a - 0.5) \\ P(a \leq x \leq b) &= P(a - 0.5 \leq x \leq b + 0.5) \end{aligned}$$

توزیع دوجمله‌ای $\rightarrow$ میانگین $= np$
واریانس $= npq$

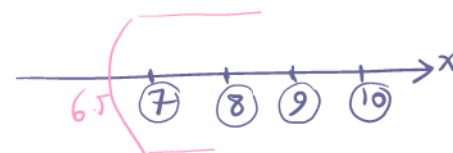
$P(X=7) \stackrel{\text{تصحیح}}{=} P(6.5 < X < 7.5) = \text{استاندارد کردن}$



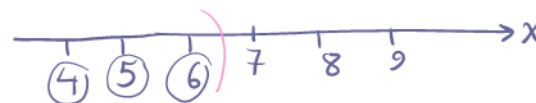
$P(X > 7) \stackrel{\text{تصحیح}}{=} P(X > 7.5)$



$P(X \geq 7) \stackrel{\text{تصحیح}}{=} P(X \geq 6.5)$



$P(X < 7) \stackrel{\text{تصحیح}}{=} P(X < 6.5)$



$P(X \leq 7) \stackrel{\text{تصحیح}}{=} P(X \leq 7.5)$



تمرین: (دکتری - ۹۵) تعداد اتومبیل‌هایی که از یک جاده عبور می‌کنند، دارای توزیع پواسون با میانگین ۳۶ اتومبیل در هر دقیقه است. با استفاده از تصحیح پیوستگی به‌وسیله توزیع نرمال با کدام احتمال حداکثر ۳۱

اتومبیل در یک دقیقه خاص از این جاده عبور می کنند؟ $(S) = 0.7734$ ← **ریسک دار نه مال**

از $-\infty$ ← 0.175

(۱) ۰.۵۲۶۶ (۲) ۰.۲۲۶۶ (۳) ۰.۳۸۶۷ (۴) ۰.۸۸۶۷

توزيع براسون

حل

$36 = 6^2$ جذر $6 = 6$ اضرب بحار

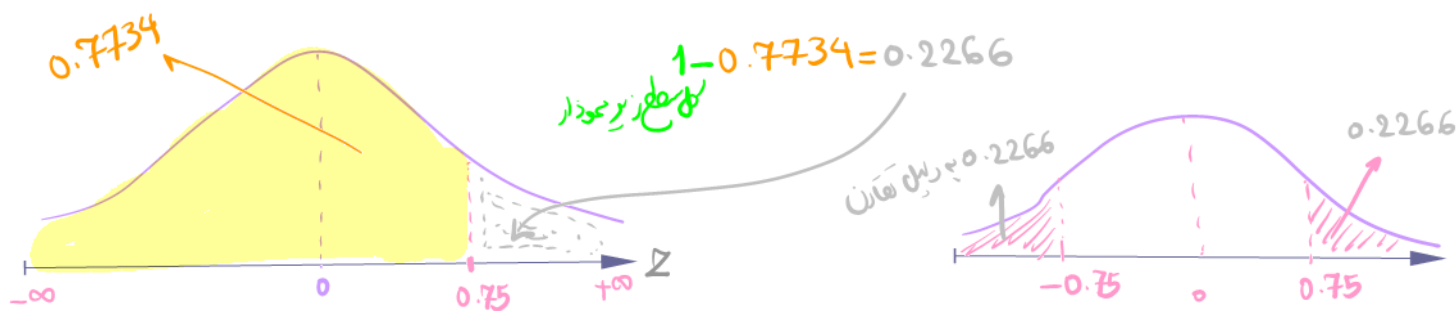
$x =$ بقولنا التوصل ما عبور

$$P(X \leq 31) = ?$$



$$P(X \leq 31) \stackrel{\text{تقریب}}{=} P(X \leq 31.5) \stackrel{\text{استاندارد کردن}}{=} P(Z \leq \frac{31.5 - 36}{6}) =$$

$$= P(Z \leq -0.75) = 0.2266$$





تمرین: (دکتری - ۹۷) شصت درصد از کالای تولیدی کارخانه‌ای نشان تأیید کیفیت دارد. از بین ۱۵۰ کالای تولیدی آن با استفاده از تصحیح پیوستگی تقریب نرمال با کدام احتمال بیشتر از ۱۰۰ کالای آن نشان تأیید کیفیت

دارد؟ $(S_{-\infty}^{-1/75} = 0.04)$ ← $\frac{1}{75}$ است از 1.75

۰/۴۸ (۴)

۰/۱۶ (۳)

۰/۰۸ (۲)

۰/۰۴ (۱) ✓

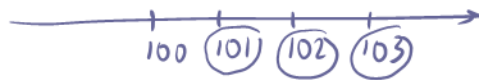
$$\left. \begin{aligned} p = \frac{60}{100} &= \text{احتمال سروری} = \text{احتمال نشان کیفیت} \\ n &= 150 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$np = \mu = 150 \times \frac{60}{100} = 90$$

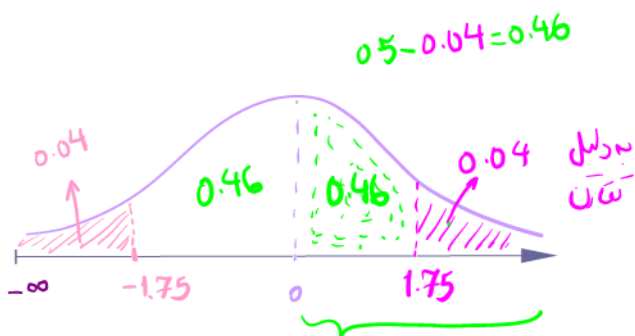
$$npq = 150 \times \frac{60}{100} \times \frac{40}{100} = 36 \Rightarrow \text{انحراف معیار} = 6$$

$$x = \text{تعداد کالاهای دارای نشان کیفیت} \Rightarrow P(X > 100) = ?$$

$$P(X > 100) \xrightarrow{\text{تصحیح}} P(X > 100.5) \xrightarrow{\text{استانداردسازی}} P(Z > \frac{100.5 - 90}{6})$$



$$= P(Z > 1.75) = 0.04$$





تمرین: (دکتری - ۹۸) اگر ۱۰ درصد از کالاهای تولیدی کارخانه‌ای معیوب باشند، در یک نمونه تصادفی ۴۰۰ تایی

از این کالا، با کدام احتمال کمتر از ۴۵ کالای معیوب وجود دارد؟ $S_{-\infty}^{-0.75} = 0.2266$ برای

۰/۲۲۶۶ (۴)

۰/۴۵۳۲ (۳)

۰/۵۴۷۸ (۲)

۰/۷۷۳۴ (۱) ✓

حی $p = \text{نسبت} = \frac{10}{100} = \text{امکان معیوب بودن}$

$q = \frac{90}{100} = \text{نسبت سالم بودن}$

$n = 400 = \text{تعداد کل}$

$P(X < 45) = ?$: X تعداد کالاهای معیوب

$np = 400 \times \frac{10}{100} = 40$ میانگین

$npq = 400 \times \frac{10}{100} \times \frac{90}{100} = 36$ واریانس

↓
اجز

$6 = 6$

$P(X < 45) \stackrel{\text{تصحیح}}{=} P(X < 44.5) \stackrel{\text{استاندارد سازی}}{=} P(Z < \frac{44.5 - 40}{6}) = P(Z < 0.75)$



$= 1 - 0.2266 = 0.2266 + 0.2734 + 0.2734$
 $= 0.7734$

