



فصل سوم: متغیر تصادفی و تابع احتمال

گاهی اوقات ما به جزئیات مربوط به فضای نمونه علاقه‌مند نیستیم بلکه فقط به یک توصیف عددی از نتیجه علاقه‌مندیم، برای این منظور به هر یک از عناصر فضای نمونه عددی حقیقی را نسبت می‌دهیم و این کار را با یک تابع حقیقی که به آن متغیر تصادفی می‌گوییم، انجام می‌دهیم.

تعریف: یک متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی است به طوری که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد. متغیرهای تصادفی را معمولاً با X و Y و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

سوال: فرض کنید سالی را دوبار پرتاب می‌کنیم:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

فضای نمونه

$$X = \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

بُعد سُرِها

اگر X بُعد سُرِها باشد
متغیر تصادفی

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

فضای نمونه

$$Y = \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

بُعد خط‌ها

اگر Y بُعد خط‌ها باشد
متغیر تصادفی

تمرین: تاس سالمی را دوبار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X مجموع اعداد روآمده باشد.

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), \dots, (2,6), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}$$

فضای نمونه

$$X = \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 7 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

مجموع
متغیر تصادفی

سوال: در کلاس خودتان، متغیر تصادفی X ، درصد درس آمار در کلاس دکترا:

$$S = \{a, b, c, d\}$$

فضای نمونه

$$X = \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 80\% & 95\% & 92\% & 40\% \end{matrix}$$

گستره
متغیر تصادفی





انواع متغیر تصادفی:

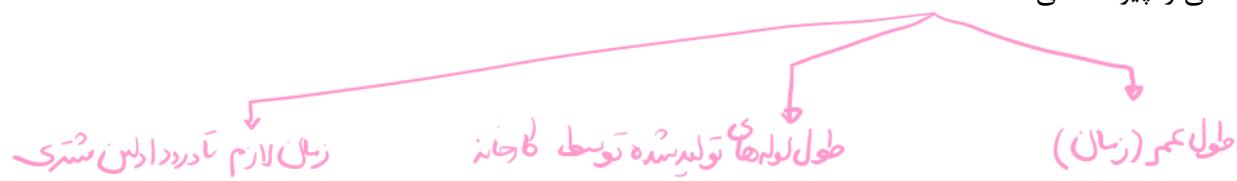
۱- متغیر تصادفی گسسته: اگر مقادیر متغیر تصادفی گسسته متناهی یا نامتناهی ولی شمارش پذیر باشد متغیر

تصادفی را گسسته می نامند.



۲- متغیر تصادفی پیوسته: اگر مقادیر متغیر تصادفی یک فاصله عددی یا اجتماع چند فاصله عددی باشد متغیر

تصادفی را پیوسته می نامند.





تابع احتمال

تابعی که با استفاده از آن احتمال مقادیر ممکن متغیر تصادفی مشخص می‌شود تابع احتمال آن متغیر تصادفی گفته می‌شود.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x: 2 \quad 1 \quad 1 \quad 0$

مقادیرها

$$P(\{HH\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}$$

$$P(2) = \frac{1}{4}$$

$$P(7) = 0$$

$$P(\{HT, TH\}) = \frac{2}{4}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{4}$$

$$P(1) = \frac{2}{4}$$

$$P(-10) = 0$$

$$P(\{TT\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=0) = \frac{1}{4}$$

$$P(0) = \frac{1}{4}$$

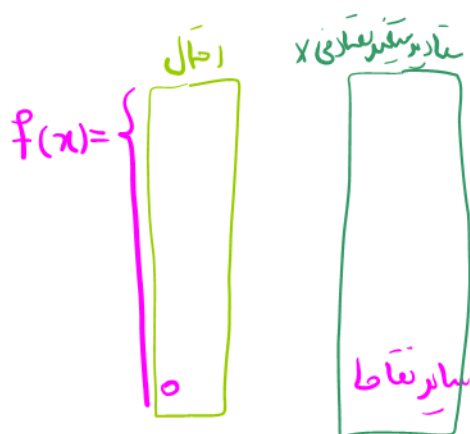
تابع احتمال متغیری x	$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{array} \right.$	اگر $x=0$
		اگر $x=1$
		اگر $x=2$
		سایر نقاط

$$\begin{aligned} \text{جمع همه احتمالات} &= 1 \\ 0 &\leq \text{احتمال ها} \leq 1 \end{aligned}$$

ویژگی‌های
تابع احتمال
 $f(x)$



ویژگی های تابع احتمال

(۱) مقادیر تابع احتمال همواره نامنفی است. ($f(x) \geq 0$)(۲) مجموع تمام مقادیر تابع احتمال همیشه برابر یک می باشد. ($\sum f(x) = 1$)احتمال اینکه f تابع احتمالاحتمال اینکه متغیر تصادفی برابر با a شود $f(a)$ 

مثال: ناس سالمی را دوبار پرتاب می کنیم. اگر متغیر تصادفی X مجموع اعداد روآمده و $f(x)$ تابع احتمال متغیر تصادفی X باشد آنگاه مطلوب است:

(الف) $f(2)$ (ب) $f(4)$ (ج) $f(9)$

حالت ۱
 $f(2) = \frac{1}{36}$ = احتمال اینکه مجموع اعداد روآمده ۲ شود = احتمال اینکه متغیر تصادفی ۲ مساوی ۲
 {۱، ۱}

حالت ۳
 $f(4) = \frac{3}{36}$ = احتمال اینکه مجموع اعداد روآمده ۴ شود = احتمال اینکه متغیر تصادفی ۴ مساوی ۴ مساوی ۴

حالت ۴
 $f(9) = \frac{4}{36}$ = احتمال اینکه مجموع اعداد روآمده ۹ شود = احتمال اینکه متغیر تصادفی ۹ مساوی ۹ مساوی ۹

تاس دوم	تاس اول
1	—
2	—
3	6
4	5
5	4
6	3





تمرین: کدام یک از توابع زیر می تواند تابع احتمال یک متغیر تصادفی باشد؟

الف - $f(x) = \frac{x}{15} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

ب - $f(x) = \frac{5-x^2}{6} \quad x = 0, 1, 2, 3$

جمع کل مقادیر $f = 1$

$0 \leq f(x) \leq 1$

متغیر تصادفی

مقادیر x	0	1	2	3	4	5
مقادیر $f(x)$	$\frac{0}{15} = 0$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

تابع احتمال $f(x) = \frac{x}{15}$

آیا جمع مقادیر $f(x)$ مساوی یک می شود؟

$$0 + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

تابع داده شده تابع احتمال است.

آیا هم مقادیر $f(x)$ بین صفر و یک هستند؟

ن

حل ب $f(x) = \frac{5-x^2}{6} \quad x = 0, 1, 2, 3$

x	0	1	2	3
$f(x) = \frac{5-x^2}{6}$	$\frac{5-0^2}{6} = \frac{5}{6}$	$\frac{5-1^2}{6} = \frac{4}{6}$	$\frac{5-2^2}{6} = \frac{1}{6}$	$\frac{5-3^2}{6} = -\frac{4}{6}$

بین صفر و یک قرار دارد $\Rightarrow$ تابع احتمال می باشد



مجموع مقادیر = 1

مقادیر ≤ 0

تابع احتمال

تمرین: به ازای کدام مقدار α ، جدول زیر می تواند توزیع احتمال متغیر تصادفی X باشد؟

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.1	0.26	α	$3\alpha-1$
	0.56 (4)		0.44 (3)	0.41 (2) ✓
				0.32 (1)

قسمت ساری

حل $0.1 + 0.26 + \alpha + 3\alpha - 1 = 1$

$$0.36 + 4\alpha - 1 = 1 \Rightarrow 4\alpha = 2 - 0.36 = 1.64$$

$$4\alpha = 1.64$$

$$\alpha = \frac{1.64}{4} = 0.41$$

نکته (سرپرست به ترمین معنی هرگاه در صورت سؤال بگوید: «به ازای کدام مقدار α ، تابع $f(x)$ تابع احتمال است»

باید در جدول $f(x)$ ، به جای α ها، اعداد داده شده برای α در صورت سؤال را قرار دهیم و بنام

مقادیری که برای $f(x)$ به دست می آید را با هم جمع کنیم و همیشه مساوی یک تکرار دهیم.





تمرین: (ارشد - ۹۳) به ازای کدام مقدار k تابع $f(x) = \frac{\binom{5}{x} 2^x}{k}$; $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ یک تابع احتمال است؟

۲۵۶ (۴)

۲۴۳ (۳) ✓

۱۲۸ (۲)

۸۱ (۱)

مجموع مقادیر = ۱

۱ ≤ مقادیر ≤ ۱

x	$f(x) = \frac{\binom{5}{x} 2^x}{k}$
۰	$\frac{\binom{5}{0} 2^0}{k} = \frac{1 \times 1}{k} = \frac{1}{k}$
۱	$\frac{\binom{5}{1} 2^1}{k} = \frac{5 \times 2}{k} = \frac{10}{k}$
۲	$\frac{\binom{5}{2} 2^2}{k} = \frac{10 \times 4}{k} = \frac{40}{k}$
۳	$\frac{\binom{5}{3} 2^3}{k} = \frac{10 \times 8}{k} = \frac{80}{k}$
۴	$\frac{\binom{5}{4} 2^4}{k} = \frac{5 \times 16}{k} = \frac{80}{k}$
۵	$\frac{\binom{5}{5} 2^5}{k} = \frac{1 \times 32}{k} = \frac{32}{k}$

$$\binom{5}{0} = 1$$

$$\binom{5}{1} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3!} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \times 1!} = \frac{5 \times 4!}{4! \times 1} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\text{جمع اتمالها} = 1 \Rightarrow \frac{1}{k} + \frac{10}{k} + \frac{40}{k} + \frac{80}{k} + \frac{80}{k} + \frac{32}{k} = 1$$

$$\frac{243}{k} = 1 \Rightarrow k = 243$$





تمرین: (ارشد - ۹۴) شرکت بیمه، اطلاعات مربوط به تعداد تصادف ۶۰ روز از یک منطقه شهری را در جدول زیر تنظیم کرده است. اگر به تصادف یک روز از این ۶۰ را انتخاب کنیم با کدام احتمال در این روز کمتر از ۳ تصادف رخ داده است؟

تعداد تصادفات	۰	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد روزها	۱۵	۱۷	۱۰	۸	۶	۴

۰/۷۵ (۴)

۰/۷۲ (۳)

۰/۷ (۲) ✓

۰/۶ (۱)

تعداد تصادفات (مقیماقی)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد روزها	۱۵	۱۷	۱۰	۸	۶	۴
احتمال	$\frac{15}{60}$	$\frac{17}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{4}{60}$

← احتمال ۰ تصادف داشتن
 ← احتمال ۱ تصادف داشتن
 ← احتمال ۲ تصادف داشتن
 ← احتمال ۳ تصادف داشتن
 ← احتمال ۴ تصادف داشتن
 ← احتمال ۵ تصادف داشتن

$$\frac{15}{60} + \frac{17}{60} + \frac{10}{60} = \frac{42}{60}$$



تابع چگالی احتمال پیوسته

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد، تابع چگالی X که آن را با $f(x)$ نشان می‌دهیم در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند.

$$f(x) \geq 0 \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

جمع مقادیر پیوسته = ۱

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (2)$$

تذکر: برای هر متغیر تصادفی پیوسته X ، $P(X = a) = 0$

چنانچه X یک متغیر تصادفی پیوسته و $f(x)$ تابع چگالی احتمال آن باشد، آنگاه:

$$P(X > a) = P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad P(x < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

$$P(a < x < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$





تمرین: (دکتری - ۹۵) اگر X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی $f(x) = kx^2$ و $0 \leq x \leq 2$ باشد، مقدار k کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{8}{3} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (1) \quad \checkmark$$

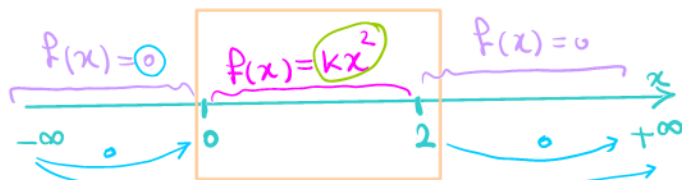
برای حل اینگونه سوالات: ① علامت انتگرال را قرار دهیم

② بالا و پایین انتگرال اعداد داده شده برای x را بنویسیم.

③ داخل انتگرال عبارت معلوم (یعنی فرکانس دهیم)

④ همیشه جواب ساری یک است.

حل



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \int_0^2 kx^2 dx = 1$$

$$k \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2$$

$$k \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$\frac{8k}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$$



تمرین: (دکتری - ۹۶) تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X به صورت زیر داده شده است. مقدار k کدام است؟

استدلال

$$\begin{cases} f(x) = k(2-x) \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2$$

برای سایر مقادیر x

$$1/5 \quad (4)$$

$$1/25 \quad (3)$$

$$0.5 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$0.25 \quad (1)$$

$$\int_0^2 k(2-x) dx = 1$$

همین استاد

$$k \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_{x=0}^{x=2} = k \left(\left(2(2) - \frac{(2)^2}{2} \right) - \left(2(0) - \frac{(0)^2}{2} \right) \right)$$

خودش

$$= k(4 - 2) = 2k = 1$$

همین ساری

$$2k = 1$$

$$k = \frac{1}{2} = 0.5$$





تمرین: (ارشد - ۹۹) قطر سیم‌های تولیدی یک متغیر تصادفی با تابع چگالی $0 < x < 1$ می‌باشد. مقدار k چقدر است؟

۱ (۴)

۳ (۳)

۶ (۲) ✓

۱۰ (۱)

حل

$$\int_0^1 kx(1-x) dx = 1$$

همیشه یک

$$\int_0^1 k(x^1 - x^2) dx =$$

خودش

$$= k \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{x=0}^{x=1} = k \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) = k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= k \left(\frac{1}{6} \right) = 1$$

همیشه یک

$$\frac{k}{6} = 1 \Rightarrow k = 6$$





تمرین: (دکتری - ۹۷) به ازای چه مقداری از k ، تابع زیر می تواند تابع چگالی احتمال باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & 1 \leq x < 3 \\ x+k & 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

استرال

۲/۶۲۵ (۴)

۲/۵ (۳)

-۲/۵ (۲)

-۲/۷۵ (۱) ✓

نکته: اگر $f(x)$ شامل چند ضابطه (مربعی) باشد، از هر ضابطه جوابانه استرال یک کنیم پس جواب ها آخر با هم جمع کرده و مساوی ۱ می گذاریم.

$$\text{حل} \quad \int_1^3 \frac{1}{8} dx + \int_3^4 (x+k) dx = 1$$

همه ستاره

$$\int_1^3 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8} x \Big|_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{8} (3 - 1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

جایه

$$\int_3^4 (x+k) dx = \left(\frac{x^2}{2} + kx \right) \Big|_{x=3}^{x=4} = \left(\frac{4^2}{2} + k(4) \right) - \left(\frac{3^2}{2} + k(3) \right)$$

$$= (8 + 4k) - \left(\frac{9}{2} + 3k \right) = 8 + 4k - \frac{9}{2} - 3k = k + \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{4} + k + \frac{7}{2} = 1 \Rightarrow \frac{15}{4} + k = 1 \Rightarrow k = 1 - \frac{15}{4} = -\frac{11}{4} = -2.75$$

همه ستاره





امکان اینکه X بین ۲ تا ۴ باشد

تمرین: (ارشد - ۹۵) تابع چگالی متغیر تصادفی X به صورت زیر است. $P(2 \leq X \leq 4)$ ، کدام است؟

امکان $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}; & x > 1 \\ 0; & \text{جای دیگر} \end{cases}$

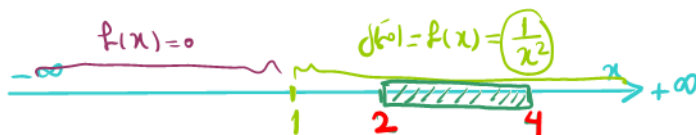
چگالی
استدلال

$$\frac{3}{16} \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1) \quad \checkmark$$



نکته: فقط وقتی محاسبه کار را با رسم جواب استدلال
مشاری یک است.

$$\text{امکان} = \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int_2^4 x^{-2} dx$$

$$= \left. \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \right|_{x=2}^{x=4} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -\left(\frac{1-2}{4} \right)$$

$$= -\left(\frac{-1}{4} \right) = \frac{1}{4} = 0.25$$

نکته: اگر x داخل استدلال در فرج کس باشد:

① ابتدا آن را به صورت کسر آورده و توان

آن را قوی (منفی) می کنیم.

② به توان x یک واحد مانده کرده و

همان توان را در فرج کس می نویسیم





تمرین: (دکتری - ۹۸) تابع چگالی احتمال به صورت $0 \leq x \leq 2$: $f(x) = k(2-x)$ داده شده است. احتمال

پیشامد $\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3) \checkmark$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

* نکته: اگر در صورت سوال گفته باشد «تابع چگالی» باید به ضابطه تابع $f(x)$ نگاه کنیم

حالت اول: اگر در فصول $f(x)$ به جز x حرف دیگری مانند k داشته باشیم

چه در صورت سوال گفته باشد چه ن گفته باشد خودمان باید k را بیابیم

حدود x

$$\int_{\text{حدود } x} f(x) dx = 1$$

حدود x

همسایگی یک

یعنی بیابیم:

حالت دوم: در فصول $f(x)$ فقط x مشاهده می شود در این صورت

$$\int f(x) dx$$

مساری که می گذاریم

$$\text{حل} \quad \int_0^2 k(2-x) dx = k \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_{x=0}^{x=2} = k \left(2(2) - \frac{(2)^2}{2} \right)$$

$$= k(4-2) = 2k \stackrel{\text{همسایگی یک}}{=} 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} k(2-x) dx = k \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_{x=\frac{1}{2}}^{x=\frac{3}{2}}$$

خواسته مسأله



$$= K \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_{x=\frac{1}{2}}^{x=\frac{3}{2}} =$$

$$= K \left(\left(2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} \right) - \left(2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} \right) \right)$$

هسته

$$= K \left(\left(3 - \frac{9}{8} \right) - \left(1 - \frac{1}{8} \right) \right)$$

$$= K \left(3 - \frac{9}{8} - 1 + \frac{1}{8} \right) = K(2 - 1) = K = \frac{1}{2}$$

↓ قبل به دست آورده بودیم.





تابع توزیع تجمعی

اگر X یک متغیر تصادفی (پیوسته یا گسسته) باشد، تابع توزیع تجمعی آن را با $F(x)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

احتمال اینکه متغیر تصادفی یا ساری عدد یا از آن کوچکتر باشد = $F(\text{عدد})$

تمرین: اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد:

$f(x)$	x
$\frac{1}{20}$	$x = -1$
$\frac{3}{20}$	$x = 0$
$\frac{5}{20}$	$x = 2$
$\frac{7}{20}$	$x = 3$
$\frac{4}{20}$	$x = 4$

مطلوب است:

الف) $F(3)$

ب) $F(2.5)$

ج) $F(0)$

د) $F(-1)$

$$\text{الف) } F(3) = P(X \leq 3) = \frac{7}{20} + \frac{5}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{16}{20}$$

3, 2, 0, -1

$$\text{ب) } F(2.5) = P(X \leq 2.5) = \frac{5}{20} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

2, 0, -1

$$\text{ج) } F(0) = P(X \leq 0) = \frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20}$$

0, -1

$$\text{د) } F(-1) = P(X \leq -1) = \frac{1}{20}$$

-1



نکته: اگر متغیر تصادفی X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمالی $f(x)$ باشد، برای محاسبه $F(a)$ باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$F(a) = P(X \leq x) = \int_{\text{حد پایین}}^x f(x) dx$$

تمرین: اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد:

$$f(x) = 2(1-x) \quad (0 < x < 1)$$

تابع توزیع آن را بیابید.





نکته: اگر از تابع توزیع مشتق بگیریم تابع چگالی احتمال به دست می آید. اگر از تابع چگالی احتمال انتگرال بگیریم، تابع توزیع به دست می آید.

$$F(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f(x) \text{ چگالی}$$

تمرین: ضابطه‌ی تابع چگالی احتمال برای کمیت تصادفی X به صورت زیر بیان شده است:

$$\varphi(x) = \frac{2x+3}{18}, \quad 0 < x < 3$$

 $F(x)$

ضابطه‌ی تابع توزیع $F(x)$ کمیت تصادفی X ، کدام است؟

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2 + 3x}{18} \quad \text{✓} \\ F(x) &= \frac{2x^2 + 3x}{54} \quad \text{✗} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2x^2 + 3x}{18} \quad \text{✗} \\ F(x) &= \frac{x^2}{18} \quad \text{✗} \end{aligned}$$

* برای مسوَل گیری از یک کسر در حالت مکی باید از قانون

$$\frac{(\text{مُسَوِّم}) (\text{خودمُسَوِّم}) - (\text{خودمُسَوِّم}) (\text{مُسَوِّم})}{(\text{خودمُسَوِّم})^2}$$

اسفاده کنیم. اما اگر مخرج کسر عدد ثابت باشد، خودمخرج را می‌توانیم فقط از صورت کسر مسوَل گیری کنیم.





تمرین: تابع توزیع متغیر تصادفی X به صورت زیر بیان شده است:

$$F(x) = 1 - \frac{4}{x^2}, \quad x > 2$$

تابع چگالی احتمال X را به دست آورید.





امید ریاضی

اگر X یک متغیر تصادفی باشد، امید ریاضی آن را با $E(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X) = \sum x f(x) \quad (\text{اگر } X \text{ یک متغیر گسسته باشد})$$

$$E(X) = \int_{\text{حد پایین}}^{\text{حد بالا}} x f(x) dx \quad (\text{اگر } X \text{ یک متغیر پیوسته باشد})$$

تمرین: (ارشاد - ۹۱) اگر تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد، امید ریاضی X کدام است؟

x	۱	۲	۳	۴	۵
$P(X=x)$	۰/۱۰	۰/۱۵	۰/۲۵	۰/۳	۰/۲
	۳/۵۰ (۴)		۳/۳۵ (۳) ✓		۳/۲۵ (۲)
					۳/۴۵ (۱)

باید x ها را در $P(x)$ (احتمال) ضرب و نتایج را جمع کنیم

(حل)

$$E(X) = \left(1 \times \frac{1}{10}\right) + \left(2 \times \frac{15}{100}\right) + \left(3 \times \frac{25}{100}\right) + \left(4 \times \frac{3}{10}\right) + \left(5 \times \frac{2}{10}\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{30}{100} + \frac{75}{100} + \frac{12}{10} + \frac{10}{10}$$

$$= \frac{10 + 30 + 75 + 120 + 100}{100} = \frac{335}{100} = 3.35$$





تمرین: (دکتری - ۱۴۰۰) قانون توزیع یکل کمیت تصادفی به صورت زیر است امید ریاضی آن کدام است؟

امکان $P_i = 0.05 + 0.05x_i$

$x_i = 1, 2, 3, 4, 5$

متغیر تصادفی

۶ (۴)

۴/۵ (۳)

۳/۵ (۲) ✓

۲ (۱)

x	$P(x) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100}x = \frac{5}{100}(1+x)$
①	$P(x) = \frac{5}{100}(1+1) = \frac{10}{100}$
②	$P(x) = \frac{5}{100}(1+2) = \frac{15}{100}$
3	$P(x) = \frac{5}{100}(1+3) = \frac{20}{100}$
4	$P(x) = \frac{5}{100}(1+4) = \frac{25}{100}$
5	$P(x) = \frac{5}{100}(1+5) = \frac{30}{100}$

@ahmadinogamriazi

امید ریاضی $E(X) = (1 \times \frac{10}{100}) + (2 \times \frac{15}{100}) + (3 \times \frac{20}{100}) + (4 \times \frac{25}{100}) + (5 \times \frac{30}{100}) =$

$$= \frac{10}{100} + \frac{30}{100} + \frac{60}{100} + \frac{100}{100} + \frac{150}{100} = \frac{350}{100} = 3.5$$

روش دوم $E(x) = \sum x P(x) = \sum x \times \frac{5}{100} (1+x) = \frac{5}{100} \sum (x + x^2)$

$$= \frac{5}{100} (\sum x + \sum x^2) = \frac{5}{100} (15 + 55) = \frac{350}{100} = 3.5$$

