



سری توانی

سری $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ را سری توانی حول x_0 می‌نامیم.

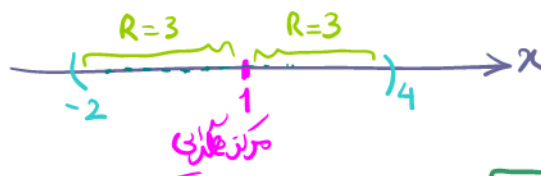
مقادیری که با جاگذاری به جای x سری را به یک سری همگرا تبدیل می‌کنند را فاصله (بازه) همگرایی سری می‌نامند.

اگر سری به ازای مقادیر x در $(x_0 - R, x_0 + R)$ همگرا باشد آنگاه R را شعاع همگرایی سری و x_0 را مرکز همگرایی سری و این فاصله را فاصله همگرایی می‌نامند.

قضیه:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times 3^n} (x-1)^n$$



$R=3$ شعاع همگرا
فاصله همگرا $= (-2, 4)$

$$-2 < x < 4 \Rightarrow$$

سری همگرا

$$x < -2 \text{ یا } x > 4 \Rightarrow$$

سری واگرا

$$x=5 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times 3^n} (4)^n \text{ سری واگرا}$$

$$x=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \times 3^n} 1^n \text{ سری همگرا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n \times 3^n} \right|} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

لا عکس

شعاع $R=3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \times \sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}$$

①

[] همگرا
() واگرا

$$x=-2 \Rightarrow \sum \frac{1}{n \times 3^n} (-3)^n = \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ همگرا}$$

$$x=4 \Rightarrow \sum \frac{1}{n \times 3^n} 3^n = \sum \frac{1}{n} \text{ واگرا}$$

$$\text{فاصله همگرا} = [-2, 4)$$



سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-b)^n$$

سری توانی

$$x-b=0 \Rightarrow \boxed{x=b} \quad \text{مرکز هژدی}$$

$$R = \text{سُغ هژدی}$$

$$(b-R, b+R) = \text{فاصله هژدی}$$

* اگر x ها داخل فاصله هژدی باشند آنگاه سری توانی هژد است.

* اگر x در خارج فاصله هژدی باشد آنگاه سری واگر است.

* در مورد نقاط انتهایی فاصله حتماً باید آن‌ها را در سری جایگذاری کرد و با کمک آزمون‌های هژدی و آزمون لایب نیتز هژدی یا واگرایی را بررسی کنیم.

نکته:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{\text{مقرن}} R = \text{سُغ هژدی}$$

نکته (مهم) قبل از بدست آوردن سُغ هژدی، حواسمان باشد که x در داخل و بیرون بدون صریح یا توان باشد. اگر صریح است ابتدا باید از صریح x

فاکتور بگیریم.



Nogammath



Nogamcenter



GMATmaster



۰۲۱۶۶۹۵۴۹۲۲



نکته: در حالت کلی:

$$\left. \begin{array}{l} R = \text{شعاع دایره} \\ b = \text{مرکز دایره} \\ (b-R, b+R) = \text{فاصله دایره} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{(a_1 + a_2)}{2} = \text{مرکز دایره} \\ \frac{a_1 - a_2}{2} = \text{شعاع دایره} \end{array}$$

نکته: آن فاصله دایره را داشته باشیم:

$$\frac{a_1 - a_2}{2} = \text{شعاع دایره}$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \text{مرکز دایره}$$





تمرین: (MBA ۹۳) بازه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ کدام است؟

$$\left[\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3} \right) \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3} \right] \quad (3) \quad \checkmark$$

$$[-4, -2) \quad \times$$

$$(-4, -2] \quad \times$$

حل
سرکند: $(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$

اگر استانداردهای مامله حلرایی را با جمع و تقسیم بر 2 کنیم، مرکز حلرایی به دست می آید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{3^n + (-2)^n}}{\sqrt[n]{n}} \stackrel{\text{رشد}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3$$

محلول

$$\Rightarrow R = \frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{2}{3} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \times \frac{1}{3^n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{3^n} (1 + (-\frac{2}{3})^n)}{n} \times \frac{1}{\cancel{3^n}}$$

$$\frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n} \stackrel{\text{رشد}}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$n \rightarrow +\infty \quad \sum \frac{1}{n} \quad \text{والدا}$$

$$\sum \frac{1 + (-\frac{2}{3})^n}{n} \quad \text{والدا}$$





$$x = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{4}{3} + 1\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^n} \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n} \times \frac{(-1)^n}{\cancel{3^n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$$

رابطه ستر

$$\frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} \sim \frac{1}{n}$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{n} \xrightarrow{\text{سری}} \ominus \frac{1}{n^2}$$

سری همگرا





تمرین: (MBA ۹۶) بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n \ln(n)}{(3n+1)5^n}$ برابر است با:

$$[-1, 4) \quad (4)$$

$$(-1, 4] \quad (3) \checkmark$$

$$[0, 3) \quad (2) \times$$

$$(0, 3] \quad (1) \times$$

نکته: برای استفاده از فرمول $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ ، حتماً باید x در داخل پرانتز بدون توان و ضرب باشد. یعنی شکل استاندارد سری توان را داشته باشیم.

$$\text{حل) سری} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \frac{2^n (x - \frac{3}{2})^n \ln n}{(3n+1) 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \times 2^n \ln n}{(3n+1) 5^n} (x - \frac{3}{2})^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{L_n(\text{جذبه ای نباشد})} = 1$$

$$\text{مرکز } x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \text{ جذبه ای نباشد}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n \times 2^n \times \ln n}{(3n+1) 5^n} \right|} = \frac{1 \times 2 \times 1}{1 \times 5} = \frac{2}{5}$$

$$|(-1)^n| = 1 \text{ و } -1$$

$$\text{عکس} \Rightarrow R^2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{ماده } \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}, \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) = (-1, 4)$$





$$\boxed{x=4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2 \times 4 - 3)^n \ln n}{(3n+1)5^n} = \sum (-1)^n \frac{\cancel{5}^n \times \ln n}{(3n+1)\cancel{5}^n}$$

$$= \sum (-1)^n \frac{\ln n}{3n+1}$$

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{3n+1} \stackrel{\text{رسم}}{=} 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\ln n}{3n+1} \xrightarrow{\text{مستوی}} \frac{\frac{1}{n} \times (3n+1) - 3 \ln n}{(3n+1)^2} = \frac{3 + \frac{1}{n} - 3 \ln n}{(3n+1)^2} = \text{عذر منفی}$$

①، ② ← لایبنتز حد

$$\boxed{x=-1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2 \times -1 - 3)^n \ln n}{(3n+1)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-5)^n \ln n}{(3n+1)5^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{(-1)^n \times (-1)^n}^{(-1)^{2n}=1} \times (5)^n \ln n}{(3n+1)\cancel{5}^n} = \sum \frac{\ln n}{3n+1}$$

$$\frac{\ln n}{3n+1} \gg \frac{1}{3n+1}$$

$$\frac{1}{3n+1} \sim \frac{1}{3n} \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\sum \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n} \quad \text{و اگر}$$

آزمون اری

$$\sum \frac{1}{3n+1} \quad \text{و اگر}$$

$$\sum \frac{\ln n}{3n+1} \quad \text{و اگر}$$



Nogammath



Nogamcenter



GMATmaster



۰۲۱۶۶۹۵۴۹۲۲



تمرین: (MBA ۹۷) بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x-6)^n}{(n+1)^9}$ کدام است؟

$$\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right] \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right) \quad (3) \quad \times$$

$$\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right) \quad (2) \quad \times$$

$$\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right] \quad (1) \quad \times$$

حل $x = \frac{5}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 \times \frac{5}{3} - 6)^n}{(n+1)^9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^9}$

لایب نیر

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^9} = \frac{1}{\infty} = 0$

② $\frac{1}{(n+1)^9} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{0 - 9(n+1)^8}{(n+1)^{18}} = -\frac{9}{(n+1)^{10}}$

لایب نیر

چکدا

$x = \frac{7}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 \times \frac{7}{3} - 6)^n}{(n+1)^9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^9}$

$\frac{1}{(n+1)^9} \sim \frac{1}{n^9}$
 $n \rightarrow +\infty$

$\sum \frac{1}{n^9}$ چکدا

آزمون همگرایی

$\sum \frac{1}{(n+1)^9}$ چکدا





تمرین: (متالوژی و صنایع ۹۹) شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n+1}$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{e}{2}} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\sqrt{\frac{2}{e}} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{e} \quad (۲)$$

$$2e \quad (۱)$$

نکته: اگر درجری $\sum$ هم x و هم n ظاهر شود، عبارت x به صورت $(\text{عدد} - x)^n$ باشد، نرم (سازگار) سری توانی است و می توانیم از روش بالا سوال را حل کنیم و شعاع همگرایی را بدست آوریم. در غیر این صورت برای آنکه بینیم سری داده شده در کدام تعادلی است باید:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\text{عبارت دخیل}}{\sum} \right|} < 1$$

برای همگرایی
مطلق آزمون ریشه

این روش برای تمام سوالات سری توانی قابل استفاده می باشد.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n+1} \right|} < 1$$

حل

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n} \times \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \times \sqrt[n]{x^{2n+1}} < 1$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{عدد}} = 1$

$$2 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n x^2 \times 1 < 1$$

$$2e^{-1} x^2 < 1$$

$$x^2 < \frac{1}{2e^{-1}} = \frac{e}{2} \Rightarrow -\sqrt{\frac{e}{2}} < x < \sqrt{\frac{e}{2}}$$

$$\text{شعاع} = \sqrt{\frac{e}{2}} \Rightarrow \left(-\sqrt{\frac{e}{2}}, \sqrt{\frac{e}{2}}\right) = \text{فاصله همگرایی}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\text{عدد}}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{هر عدد مثبت}} = 1$$





تمرین: (مکانیک ۹۹) اگر $b \geq a > 0$ باشد، آنگاه فاصله همگرایی سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax+b)^n}{a^n + b^n}$ کدام است؟

(۱) $(\frac{-1-b}{a}, \frac{1-b}{a})$ (۲) $(\frac{-1-2b}{a}, \frac{1-b}{a})$ (۳) $(\frac{-2b}{a}, 0)$ (۴) $(0, \frac{2b}{a})$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

مرکز همگرایی $ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

باید $-\frac{b}{a}$ وسط بازه همگرایی باشد. (یعنی مرکز همگرایی = $\frac{\text{انتهای بازه} + \text{ابتدای بازه}}{2}$) لذا گزینه‌های ۲ و ۴ قابل قبول نیست.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ax+b)^n}{a^n + b^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n (x + \frac{b}{a})^n}{a^n + b^n}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^n + b^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{a^n}}{\sqrt[n]{b^n (1 + \frac{a^n}{b^n})}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{b \sqrt[n]{1 + (\frac{a}{b})^n}} = \frac{a}{b}$$

$$(a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{a}{b})^n = 0)$$

و لذا $R = \frac{b}{a}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^n + b^n}} = 1 \text{ آنگاه } a = b$$

تمرین: (معدن ۹۸) بازه همگرایی سری تابعی $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, \infty)$ (۲) $(0, \infty)$ (۳) $[0, \infty)$ (۴) $(-\infty, 0)$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|e^{-nx}|} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{-nx}{n}} < 1 \Rightarrow e^{-x} < 1$$

$$-x < \ln(1) = 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \text{بازه همگرایی} = (0, \infty)$$





به دست آوردن مجموع سری‌ها

برای بدست آوردن حاصل سری‌های عددی از یکی از حالت‌های زیر استفاده می‌کنیم:

- سری تلسکوپی
- سری هندسی
- سری تیلور و مک لورن
- ۱. سری‌های تلسکوپی:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{\infty}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+2}) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\text{درآجله اول}} - 2a_{\infty}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+3}) = \underbrace{(a_1 + a_2 + a_3)}_{\text{سه آجله اول}} - 3a_{\infty}$$

نکته: اگر بتوانیم عبارت جلوی $\sum$ را به صورت تفاضل دو جمله بنویسیم که اگر در جمله اول به جای n ها، $(n+1)$ قرار دهیم جمله دوم به دست آید، در این صورت:

$$\text{حاصل سری} = \boxed{\text{جایگذاری اندیس و پس به جای } n \text{ ها در جمله اول}} - \boxed{\text{جایگذاری } \infty \text{ به جای } n \text{ ها در جمله اول}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\left(\text{در } n \text{ به جای } n+1 \right)}_{\text{درآجله اول}} - \underbrace{\left(\text{در } n \text{ به جای } n \right)}_{\text{درآجله دوم}} \right) = \text{درآجله اول} - \text{درآجله دوم} = \text{حاصل سری}$$

هرچه n داریم تبدیل کنیم به $(n+1)$





(رانی ۸۵) معاداری

کدام است؟ $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$

$\frac{3}{2} (4)$

$\frac{5}{4} (3)$

(2)

$\frac{3}{4} (1)$

حل

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{\infty!} = 1 - 0 = 1$$

کون دین $\frac{1}{n!}$ $\frac{1}{(n+1)!}$ $\frac{1}{1!}$ کون دین

n هار تیل $(n+1)$ کینم





تمرین: حاصل سری زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

نکته: اگر در جلوی Σ یک کسر داشته باشیم که مخرج آن قابل تجزیه کردن باشد، می‌توانیم برای به دست آوردن حاصل سری عددی از سری تلسکوپی استفاده کنیم. در این حالت باید ابتدا کسر را تجزیه کنیم.

$$\text{حل} \quad \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{1}{(4n+3)-(4n-1)} \left(\frac{1}{(4n-1)} - \frac{1}{(4n+3)} \right) =$$

(دو) (دو) (دو) (دو)

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right)$$

$$\text{سری} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4(1)-1} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{12}$$

حد دوم Σ حد اول Σ

n ها را راستی به (n+1) می‌کنیم

$$\frac{1}{4(n+1)-1} = \frac{1}{4n+4-1} = \frac{1}{4n+3}$$



(عمران ۸۷) مقدار سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ برابر با چیست؟

۱ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱) ✓

$$\text{حل} \quad \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{(n+1)-(n-1)} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{a_n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{1}{2-1}}_{\text{مقدار } n=2} + \underbrace{\frac{1}{3-1}}_{\text{مقدار } n=3} - 2 \left(\frac{1}{\infty-1} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 0 \right) = \frac{3}{4}$$



(عمران ۸۹) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$ برابر است با:

(4) $\frac{30}{71}$

(3) $\frac{4}{5}$

(2) $\frac{11}{3}$

(1) $\frac{25}{48}$ ✓

حل $\frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{(n+4) - n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$

(نوی - نوی) (نوی نوی)

سری = $\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 4a_{\infty} \right)$

(n=1) (n=2) (n=3) (n=4)

تمام n ها را به (n+4) تبدیل کنیم

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{12+6+4+3}{12} - 4 \cdot \frac{1}{\infty} \right) = \frac{25}{48}$$



(عمران ۸۶) مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ برابر با چیست ؟

۱ (۴) ✓

$\frac{1}{2}$ (۳) ✗

$\frac{1}{3}$ (۲) ✗

$\frac{1}{4}$ (۱) ✗

حل $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2(n+1)^2}$

سری = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2(n+1)^2} \right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \left(\frac{1}{1^2} \right) - \frac{1}{\infty^2} = 1$

a_n

n ها به $(n+1)$ تبدیل می کنیم

ردیف دوم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots \Rightarrow$ جواب سری $> \frac{3}{4}$

$n=1$ $n=2$



(صنایع سیم ۹۵) مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$ کدام است ؟

(۴) والراس

(۳) صفر

(۲) $-\ln \frac{1}{2}$

(۱) $-\ln 2$ ✓

حل $\ln \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \ln \frac{\frac{k}{(k+1)}}{\frac{(k+1)}{(k+2)}} = \ln \frac{k}{k+1} - \ln \frac{k+1}{k+2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \frac{k}{k+1} - \ln \frac{k+1}{k+2} \right) = a_1 - a_{\infty} = \ln \frac{1}{1+1} - \ln \frac{\infty}{\infty+1}$

تلاش اول

ک رابطه (k+1) می کشیم

$\stackrel{2}{\text{رسد}} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{k}{k} = \ln \frac{1}{2} - \ln 1 = -\ln 2$





تمرین: (MBA ۸۸) مجموع سری $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$ کدام است؟

$$2 \ln(2) \quad (۴)$$

$$\frac{9}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

نکته: در سوالات مربوط به سری، همیشه یادمان باشو، صورت سؤال را به فرم $\sum a_n$ بنویسیم.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (*)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\cancel{(n+1)} - \cancel{n}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(دو دو) (دو - دو)

$$(*) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left(a_1 - a_{\infty} \right) = 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\infty} \right) = 2$$

کلیان می‌بینی

تمام عبارات به دل به $(n+1)$ می‌کنیم





۲. سری هندسی

$$a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}$$

تمرین: (MBA ۹۵) اگر $|x| < 1$ ، $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ باشد مقدار $f\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۱)$$

نکته: اگر $\sum_n (\text{مقدار ثابت})^n$ داشته باشیم، سری مورد نظر یک سری هندسی است.
 $|مقدار ثابت| < 1$: برای همگرایی سری

مقدار ثابت = قدر نسبت سری
 متغیر n

۱- حدیث $\sum$ را در عبارت جای $\sum$ جایگزینی کنیم
 تا جمله اول بدست آید.

۲- مقدار ثابت = قدر نسبت سری

جمله اول
 قدر نسبت ۱-
 حاصل = : برای بدست آوردن حاصل سری

حل

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{\text{جمله اول}}{1 - \text{قدر نسبت}} = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x}$$

سری هندسی

جمله اول: $(-x)^0 = (-x)^1 = 1$

قدر نسبت = $-x$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$





(آمار ۸۴) حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n \times 3^n}$ کدام است ؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{2} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

حل سری = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \times 3^n} + \frac{3^n}{2^n \times 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$\swarrow$ قدریست $= \frac{1}{3}$ $\searrow$ جمله اول $= \frac{1}{3}$ $\swarrow$ قدریست $= \frac{1}{2}$ $\searrow$ جمله اول $= \frac{1}{2}$





تمرین. اگر $\tan \alpha = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \right)^n$ چقدر است؟

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{5} \quad (2) \checkmark$$

$$-\frac{1}{3} \quad (1)$$

حل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \right)^n =$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha &= 2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\tan \alpha)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-\tan \alpha)^n \stackrel{\tan \alpha = \frac{1}{4}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} \right)^n$$

مقدار

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{1 - (-\frac{1}{4})} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{5}$$

سری هندسی

مقدار اول $= (-\frac{1}{4})^1 = -\frac{1}{4}$

مقدار نسبت $= -\frac{1}{4}$





۳. استفاده از بسط

تمرین: (MBA ۹۷) مقدار $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \cdot n!}{3^{n+1}}$ برابر کدام عدد است؟

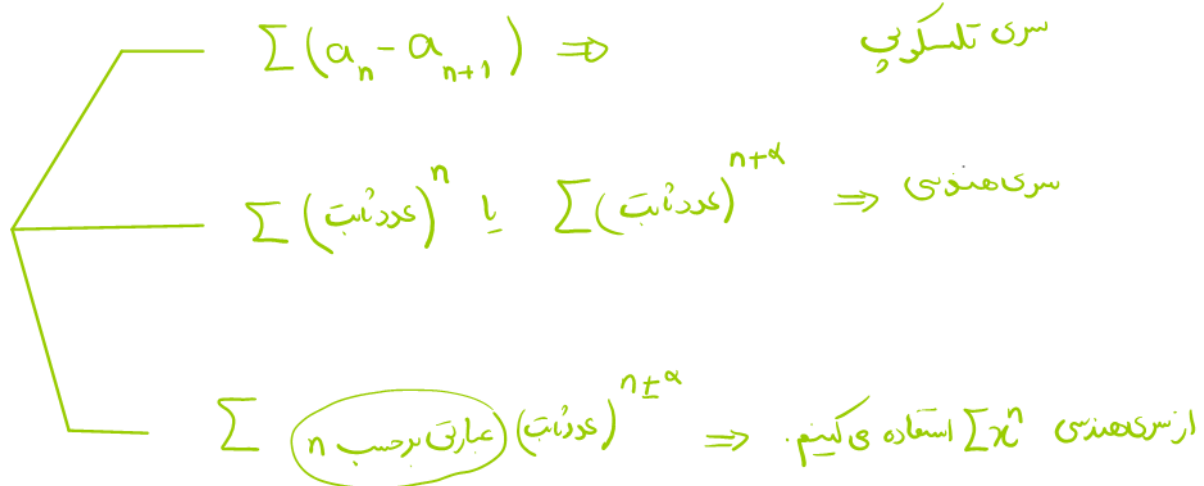
۹ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲) ✓

۳ (۱)

نکته: در سوالاتی که مقدار سری خواسته شده است و n در توان قرار دارد



حدی این $\sum$ با توجه به صورت سؤال انتخاب می‌شود.

باید حاصل سری هندسی را نوشتیم با توجه به صورت سؤال از عملیات زیر استفاده کنیم:

- ۱- مشتق گرفتن از طرفین تساوی
- ۲- اشتغال گرفتن از طرفین تساوی
- ۳- ضرب طرفین تساوی در توان مناسبی از x

با توجه به صورت سؤال $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (با مشتق گرفتن از طرفین تساوی)

مشتق گرفتن از طرفین تساوی: $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

ضرب طرفین تساوی در x^2 : $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x^2 \times \frac{1}{(1-x)^2}$

با توجه به صورت سؤال $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n+1} = \frac{x^2}{(1-x)^2}$

با توجه به صورت سؤال $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}$





$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{9}} = 4$$

نمونه حاصل $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ را بیابید

(حلی)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

مشتق $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{(1-x) + x}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{x x^2}$

$x^2 \times \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x^2 \times \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x^2}{(1-x)^2}$

مشتق $\downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n =$$





$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e$$

$$\text{مربعین: } 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e - 1$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e - 2$$

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots = \frac{1}{e}$$

$$e^{-1} = 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = \sin(1) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots = \sinh(1) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \Rightarrow 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots = \cos(1) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \Rightarrow 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots = \cosh(1) \end{aligned} \right.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \tan^{-1}(1)$$

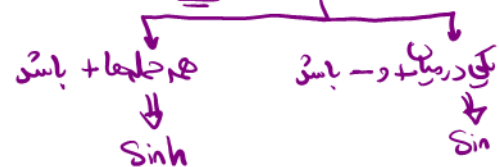
$$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \tanh^{-1}(1)$$



اگر خروجی کسر فقط با تبدیل های زوج را داشته باشد

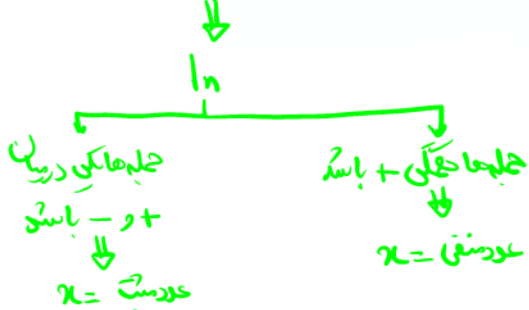


اگر خروجی فقط با تبدیل های فرد را داشته باشد



اگر خروجی کسر با اعداد از بیرون با تبدیل

راشته باشد



$\tan^{-1}$, $\tanh^{-1}$ $\Rightarrow$ اگر خروجی فقط اعداد از بیرون با تبدیل داشته باشد

* اگر همه اعداد با تبدیل در خروجی کسر باشد

سبب e





تمرین: (MBA ۹۴) مقدار عددی سری $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ کدام است؟

$$2 \ln 2 + 2 \quad (۴)$$

$$2 \ln 2 - 2 \quad (۳)$$

$$2 \ln 2 + 1 \quad (۲)$$

$$2 \ln 2 - 1 \quad (۱) \checkmark$$

نکته: در سوالات مربوط به «مقدار عددی سری» می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم (یعنی به جای آن مقدار قرار دهیم) و مقدار تقریبی سری را بدست آوریم.
این مقدار تقریبی از میانگین بدست آوریم و ببینیم که مقدار سری به کدام یک از این نزدیک تر است.

روش اول (حلی)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \dots \approx \frac{1}{3} \approx 0.3$$

$n=0$ $n=1$

$$1 < 2 < e \approx 2.7 \Rightarrow \ln 1 < \ln 2 < \ln e \Rightarrow 0 < \ln 2 < 1 \Rightarrow 0 < 2 \ln 2 < 2$$

تست گزینه (۴): $2 < 2 \ln 2 + 2$ ✗

تست گزینه (۳): $2 \ln 2 - 2 < 0$ ✗

تست گزینه (۲): $1 < 2 \ln 2 + 1$ ✗

تست گزینه (۱): صحیح ✓

روش دوم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+2)-(n+1)} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$





$$\text{سری} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)}_{n=0} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)}_{n=1} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)}_{n=2} - \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)}_{n=3} + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots \right) = 1 - 2 \left(1 - \ln 2 \right)$$

؟
حساب
 $1 - \ln 2$

$$= 1 - 2 + 2 \ln 2$$

$$= 2 \ln 2 - 1$$

حسابات: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$

$x=1$
 $\Rightarrow$

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = 1 - \ln 2$$





تمرین: (MBA ۹۳) حاصل جمع سری $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(2)^n}$ برابر است با:

$$\ln 3 - \frac{5}{8} \quad (۴)$$

$$\ln 2 - \frac{5}{8} \quad (۳)$$

$$\ln 3 \quad (۲)$$

$$\ln 2 \quad (۱)$$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

چون می‌خواهیم همه جمله‌ها مثبت باشد (هم علامت) X باید منفی باشد. با توجه به صورت سوال قرار می‌دهیم:

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \dots$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2 - \frac{5}{8}$$

می‌توانیم با کمک Σ بدون باز کردن بسط $\ln$ نیز آن را حل کنیم:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

و در دو طرف به جای X عدد $-\frac{1}{2}$ می‌گذاریم:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2^n \times n}$$

(چون $2n+1$ عدد فرد است پس $(-1)^{2n+1} = -1$)

$$-\ln(2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2)^n}$$

$$\ln(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(2)^n} \Rightarrow \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(2)^n} = \ln(2) - \frac{5}{8}$$





تمرین: (MBA ۹۱) مجموع سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!}$ کدام است؟

e (۴)

e-۱ (۳)

e^{-۱} (۲)

۱ (۱) ✓

حل) روش اول

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = \frac{1}{(1-1)!} - \frac{1}{(\infty-1)!}$$

نهارا تبدیل به (n+1) کنیم

$$= \frac{1}{0!} - \frac{1}{\infty} = 1$$

روش دوم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right) - \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \right)$$

(n=0) (n=2) (n=3) (n=4) (n=1) (n=2) (n=3)

$$= (e) - (e-1) = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow 1 + \boxed{1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots} = e$$

x=1

