



مثال: سطح محصور بین محورها و نمودار $y = \sin^{-1}(x-1)$ و خط $y = \frac{\pi}{2}$ برابر است با:

$$2 - \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

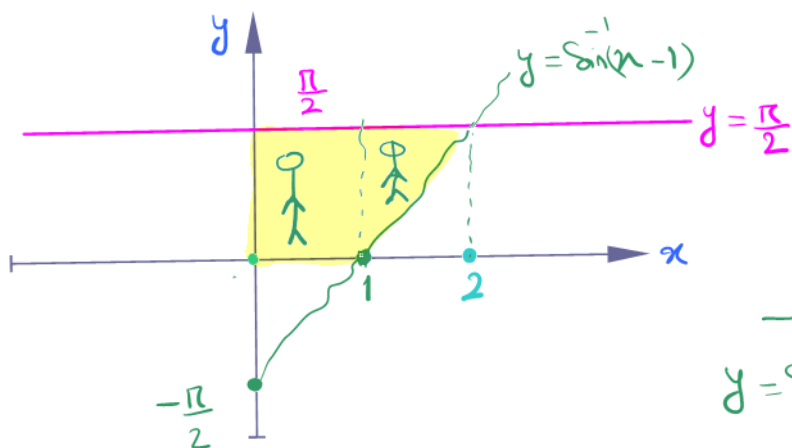
$$\frac{\pi}{2} - 1 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} + 1 \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{2} + 2 \quad (1)$$

$$\sin^{-1} \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$y = \sin^{-1}(x-1) \Rightarrow x-1 = \sin y \Rightarrow x = 1 + \sin y$$

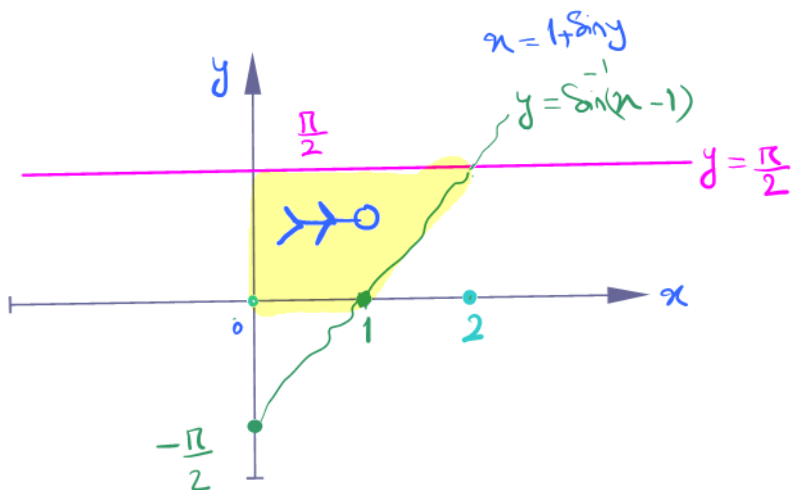


$$y=0 \Rightarrow x=1$$

$$x=0 \Rightarrow y=-\frac{\pi}{2}$$

x	0	1	2
$y = \sin^{-1}(x-1)$	-	0	+

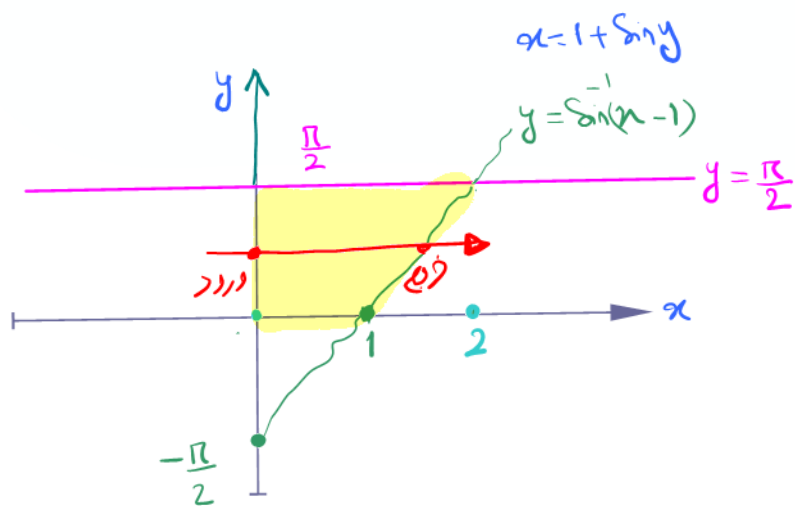
$$S = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x-1) \right) dx$$



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin y - 0) dy$$

$$S = y - \cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$$





$$S = \int \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{1+\sin y} dx dy = \int \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin y) dy$$





حجم حاصل از دوران

محور دوران افقی : $V = \pi \int_a^b (\text{شعاع دوران})^2 dx$

ارتفاع $\times$ (شعاع دوران) : $V = 2\pi \int_a^b$

تمرین: (عمران ۹۷) حجم حاصل از دوران ناحیه $y = \sqrt[4]{e^{\sqrt{x}}}$ و محور x ها، حول محور x ها در فاصله $[0, 4]$ کدام است؟

محور دوران

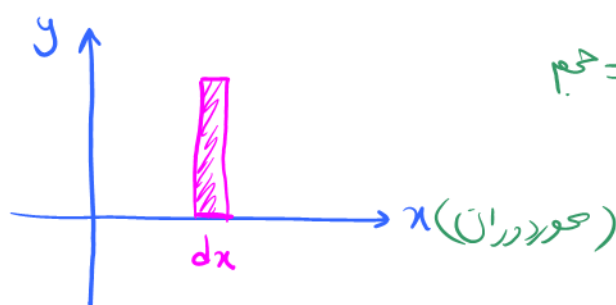
$$8\pi e (4)$$

$$4\pi e (3)$$

$$4\pi (2)$$

$$8\pi (1)$$

حل



$$\text{حجم} = \pi \int (\text{شعاع})^2 dx$$

$$\text{حجم} = \pi \int_0^4 (\sqrt[4]{e^{\sqrt{x}}})^2 dx = \pi \int_0^4 \sqrt{e^{\sqrt{x}}} dx = \pi \int_0^4 e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{cases} x = u^2 \Rightarrow \\ x = 4 \Rightarrow u = 2 \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ dx = 2u du \end{cases}$$

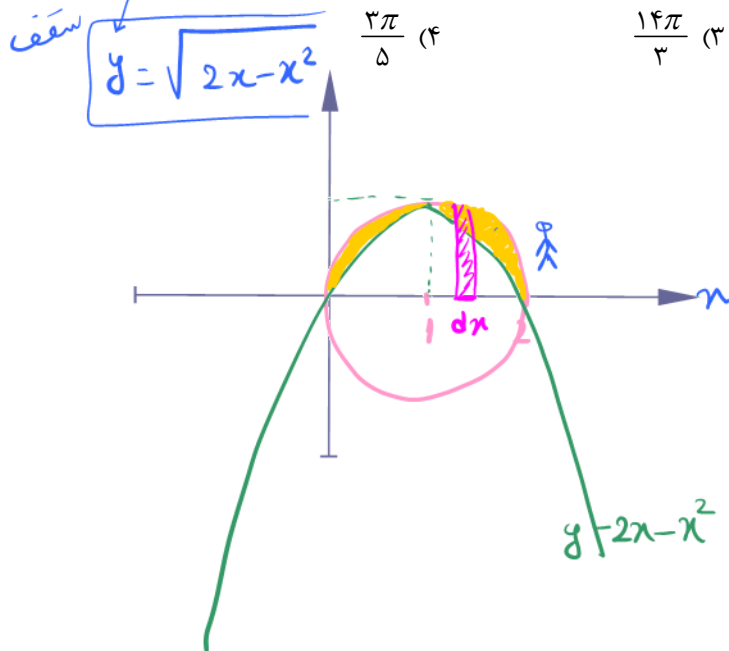
$$= \pi \int_{u=0}^2 e^{\frac{1}{2}u} \times 2u du \Rightarrow \text{جواب}$$





تمرین: (نساجی ۹۴) حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی $y = 2x - x^2$ از پایین و $(x-1)^2 + y^2 = 1$ از بالا، حول محور x ها کدام است؟

$$y^2 = 1 - (x-1)^2 = 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x - x^2$$



$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{4\pi}{15} \quad (1)$$

$$y = 2x - x^2 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

	رأس	محل	رأس	محل
x	1	0	1	0
y	1	0	1	0

$$V = \pi \int_0^2 ((\text{سقف})^2 - (\text{کف})^2) dx$$

$$= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 - (2x - x^2)^2 dx = \frac{4\pi}{15}$$





تمرین: (کامپیوتر ۹۷) ناحیه بین منحنی $x = e^y + \sin y$ و $x = \sin y$ برای $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ را حول محور x ها دوران

محور دوران

می دهیم. حجم جسم حاصل از دوران کدام است؟

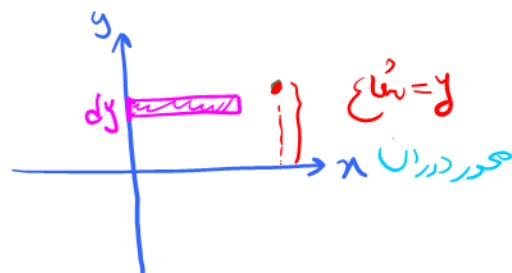
$$\pi(\pi-1)e^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \quad (2)$$

$$\pi(\pi-2)e^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \quad (1) \checkmark$$

$$\pi(\pi-1)e^{\frac{\pi}{2}} + \pi \quad (4)$$

$$\pi(\pi-2)e^{\frac{\pi}{2}} + \pi \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} > y > 0 \quad dy = \text{ارتفاع}$$



$$\text{حجم} = 2\pi \int \text{ارتفاع} \times \text{سُفَاع} \, dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{سُفَاع} &= x \Rightarrow \text{محور دوران } y \\ y &= \text{سُفَاع} \Rightarrow \text{محور دوران } x \end{aligned}}$$

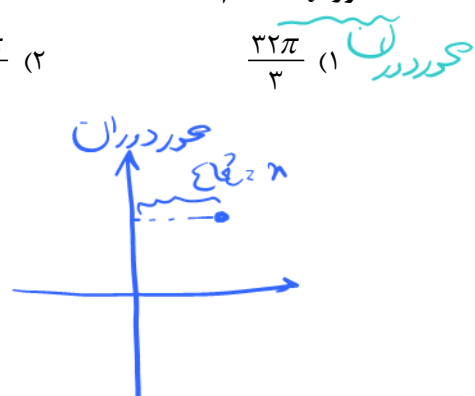
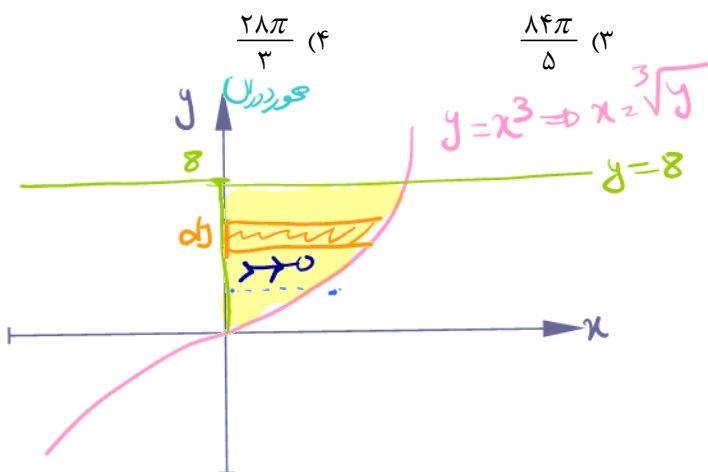
$$\text{مح} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \left((e^y + \sin y) - (\sin y) \right) dy = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} y e^y dy \quad (\text{حبل})$$



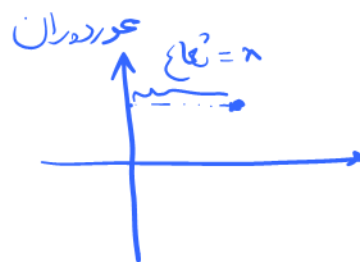
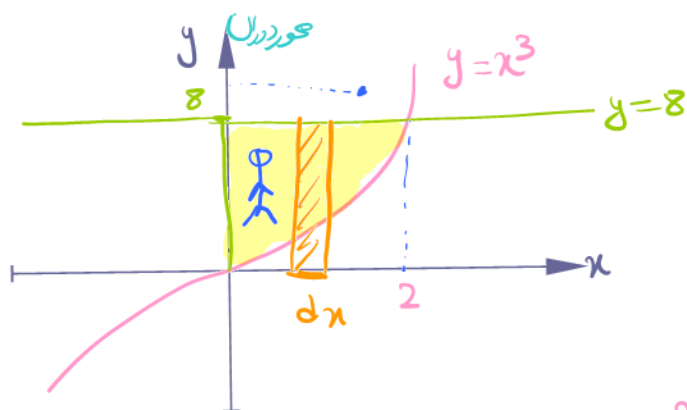


تمرین: (MBA ۹۵) حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی $y = x^3$ و محور y ها از $y = 0$ تا $y = 8$ حول

محور y ها کدام است؟



$$\text{حجم} = \pi \int (\text{سُفَع})^2 dy = \pi \int x^2 dy = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy$$



$$\text{حجم} = 2\pi \int_0^2 x \times (\text{ارتفاع} \times \text{سُفَع}) dx = 2\pi \int_0^2 x \times (8 - x^3) dx$$

کف - سقف

$= \frac{96\pi}{5}$





تمرین: (ریاضی ۹۹) حجم حاصل از دوران ناحیه بی کران واقع در ربع اول بین محور x ها و منحنی $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

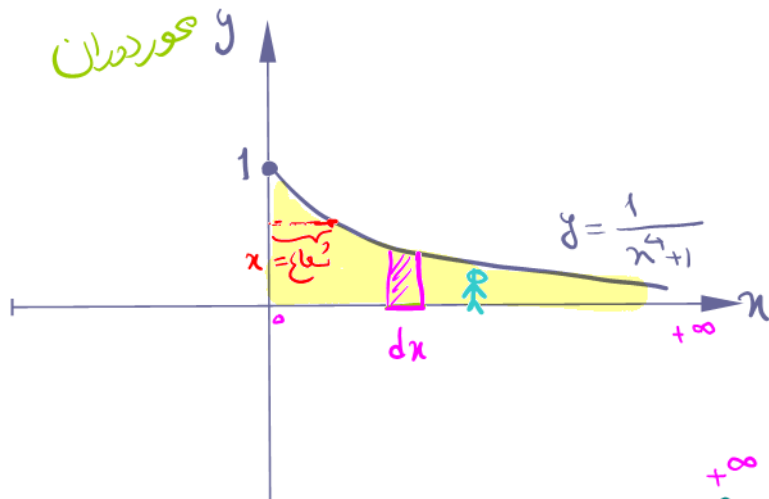
محور دوران
حول محور y ها کدام است؟

$$\frac{\pi^2}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi^2}{2} \quad (۲) \checkmark$$

$$\infty \quad (۱)$$



$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 1} \quad \oplus \text{ هماره}$$

$$x=0 \Rightarrow y=1$$

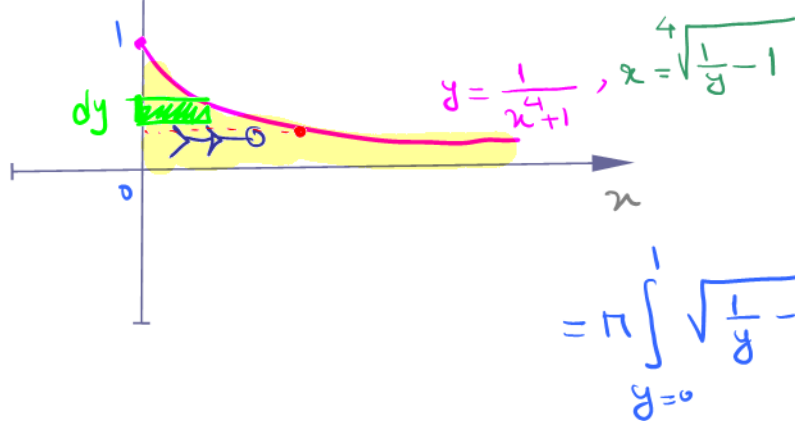
$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow y=0$$

$$\text{حجم} = 2\pi \int_{x=0}^{+\infty} \text{ارتفاع} \times \text{سُفّاح} \times \text{المان} = 2\pi \int_0^{+\infty} x \times \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx \quad \stackrel{x^2=u}{=} \quad$$

$$\text{حجم} = \pi \int (\text{سُفّاح})^2 \times \text{المان} = \pi \int (x)^2 dy$$

محور دوران



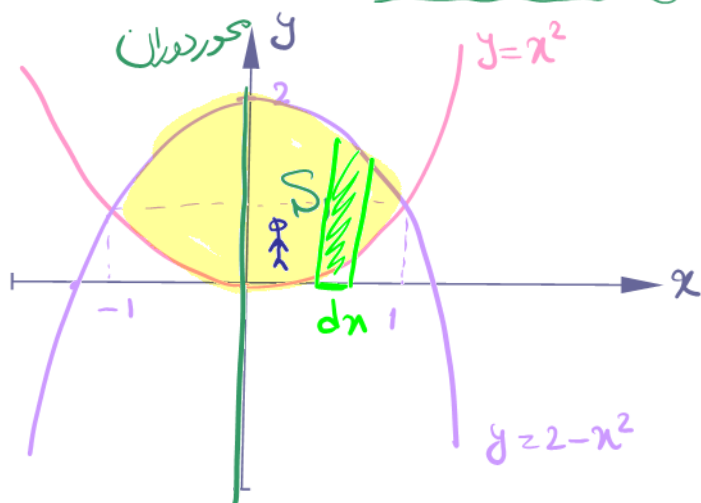
$$= \pi \int \left(\sqrt[4]{\frac{1}{y} - 1} \right)^2 dy$$

$$= \pi \int_{y=0}^1 \sqrt{\frac{1}{y} - 1} dy$$



نکته: در سوالات حجم حاصل از دوران، اگر محور دوران، محور تقارن ناحیه باشد، باید حجم حاصل از دوران نیمه‌ای از شکل که در یک طرف محور دوران قرار دارد را محاسبه کنیم و نباید جواب را در ۲ ضرب کنیم.

تمرین: ناحیه محدود بین دو نمودار $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ حول محور y ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چقدر است؟



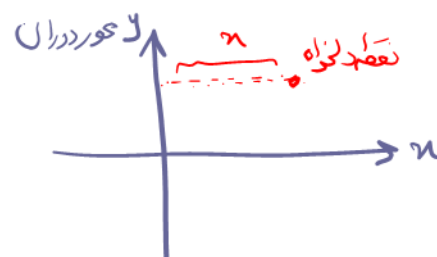
$$y = 2 - x^2 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	-1	0	1
y	1	2	1

بافت شکل دوران می‌کند $\Rightarrow$ محور تقارن = محور دوران

$$dV = 2\pi \times \text{ارتفاع} \times \text{شعاع} \times dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \times \left((2 - x^2) - (x^2) \right) dx = \pi$$





طول قوس

$$(۱) \quad y = f(x) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$(۲) \quad x = f(y) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + x'^2} dy$$

$$(۳) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$(۴) \quad r = f(\theta) \Rightarrow ds = \sqrt{r'^2 + r^2} d\theta$$

$$\text{طول قوس} = \int ds$$

تمرین: (MBA ۹۳) طول قوس $f(x) = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ برای $\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{4}$ کدام است؟

۱ (۴)

 $\frac{1}{3}$ (۳) ✓ $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

$$\text{حل} \quad y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1-2x+1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \frac{2(1-x)}{2\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$$

2 قاعده

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \frac{1-x}{x}} dx \Rightarrow ds = \sqrt{\frac{x+1-x}{x}} dx$$

$$\Rightarrow ds = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$L = \int ds = \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}$$





تمرین: (MBA ۹۸) طول قوس منحنی C به معادله $y = \tan^{-1}(\frac{t}{2})$ و $x = \ln \sqrt{4+t^2}$ در بازه $0 \leq t \leq 2$ کدام است؟

$$\ln(1+\sqrt{2}) \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{8} \quad (۲)$$

$$\ln(\sqrt{2}-1) \quad (۱)$$

$$\begin{aligned} \text{حل} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln(4+t^2) \Rightarrow x' = \frac{1}{2} \times \frac{2t}{4+t^2} \Rightarrow x' = \frac{t}{4+t^2} \\ y = \tan^{-1}(\frac{t}{2}) \Rightarrow y' = \frac{1/2}{1+(\frac{t}{2})^2} = \frac{2}{4+t^2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{t}{4+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{4+t^2}\right)^2} dt$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{\frac{t^2+4}{(4+t^2)^2}} dt \Rightarrow ds = \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt$$

$$\text{طول قوس } L = \int ds = \int \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt = \ln(t + \sqrt{t^2+4}) \Big|_{t=0}^2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$$





تمرین: (MBA ۹۹) طول منحنی $r = 1 + \sin \theta$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$4\sqrt{2} \quad (۴) \quad \checkmark$$

$$5\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$10 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۱)$$

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta$$

$$ج) \quad r = 1 + \sin \theta \Rightarrow r' = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} r^2 + r'^2 &= (1 + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta = \underbrace{1}_{+} + \underbrace{\sin^2 \theta}_{+} + \underbrace{2 \sin \theta}_{+} + \underbrace{\cos^2 \theta}_{+} \\ &= 2 + 2 \sin \theta = 2(1 + \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\text{طول منحنی} = \int ds = \int \sqrt{2(1 + \sin \theta)} d\theta = \sqrt{2} \int \sqrt{1 + \sin \theta} d\theta = (*)$$

$$1 + \sin \theta = \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^2$$

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{1 + \sin \theta} \times \frac{\sqrt{1 - \sin \theta}}{\sqrt{1 - \sin \theta}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{1 - \sin \theta}} = \cos \theta (1 - \sin \theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} (*) &= \sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{\left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^2} d\theta = \sqrt{2} \int_0^\pi \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \sqrt{2} \left(-2 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \sqrt{2} ((0 + 2) - (-2 + 0)) = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$



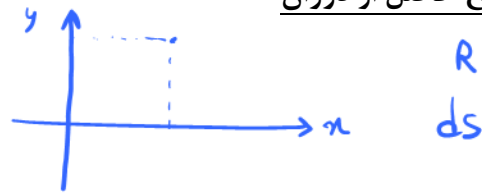
$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh 2x}{2}$$



سطح حاصل از دوران

ds = المان طول قوس
 R = فاصله ds تا محور دوران

$$\Rightarrow S = 2\pi \int R ds$$



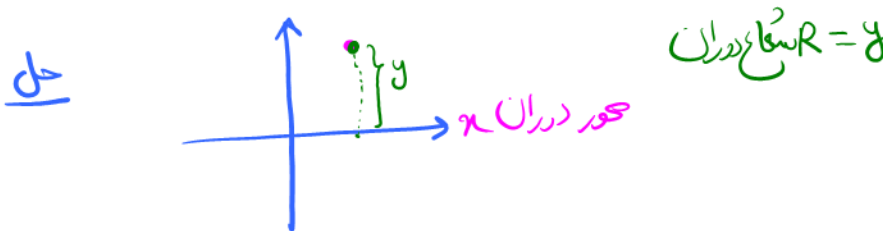
تمرین: (MBA ۹۰) منحنی به معادله $0 \leq x \leq 5$ و $y = 6 \cosh\left(\frac{x}{6}\right)$ را حول محور x ها دوران می دهیم. در شکل حاصل نسبت عدد حجم به عدد سطح جانبی آن کدام است؟

$\frac{2\pi}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{2}{1}$ (۲)

$\frac{3}{1}$ (۱) ✓



$$y' = 6 \times \frac{1}{6} \sinh \frac{x}{6} \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} dx \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{6}} dx$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{\cosh^2 \frac{x}{6}} dx \Rightarrow ds = \cosh \frac{x}{6} dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{سطح حاصل از دوران} &= 2\pi \int R ds = 2\pi \int y \times \cosh \frac{x}{6} dx = 2\pi \int 6 \cosh \frac{x}{6} \cosh \frac{x}{6} dx \\
 &= 12\pi \int_0^5 \cosh^2 \frac{x}{6} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{حجم حاصل از دوران} &= \pi \int (y^2) dx = \pi \int y^2 \times dx = \pi \int \left(6 \cosh \frac{x}{6}\right)^2 dx \\
 \frac{\text{حجم}}{\text{سطح}} &= \frac{36\pi \int_0^5 \cosh^2 \frac{x}{6} dx}{12\pi \int_0^5 \cosh^2 \frac{x}{6} dx} = 3
 \end{aligned}$$





تمرین: (مکانیک ۹۷) فرض کنید $f(x) = \int_0^x \sinh(t^2) dt$ که $0 \leq x \leq \sqrt{\ln(1396)}$ است. منحنی را حول محور y ها

عوردها

دوران می دهیم. مساحت رویه حاصل از دوران کدام است؟

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} \left(1396 - \frac{1}{1396} \right)$$

$$(1) \quad 2\pi \left(1396 - \frac{1}{1396} \right)$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} \left(1396 - \frac{1}{1396} \right) \quad \checkmark$$

$$(3) \quad \pi \left(1396 - \frac{1}{1396} \right)$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$y' = 1 \sinh(x^2) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \sinh^2(x^2)} dx = \cosh(x^2) dx$$

$$ds = \cosh(x^2) dx$$



$R = x$ شعاع دوران

$$\text{مساحت حاصل از دوران} = 2\pi \int R ds = 2\pi \int_0^{\sqrt{\ln(1396)}} x \cosh(x^2) dx = 2\pi \left[\frac{1}{2} \sinh(x^2) \right]_{x=0}^{x=\sqrt{\ln(1396)}}$$

$$= \pi \sinh(\ln(1396)) = \pi \times \frac{e^{\ln 1396} - e^{-\ln 1396}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1396 - \frac{1}{1396} \right)$$





$$x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t) dt$$

حجم و سطح منحنی پارامتری

اگر معادله منحنی به صورت $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ داده شده باشد؛ آنگاه: $S = \int f(x) dx = \int |y(t)x'(t)| dt$

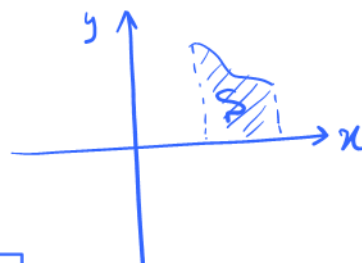
مساحت محدود توسط منحنی و محور X ها (الف) $= \int_{t=a}^b |y(t)| |x'(t)| dt$

مساحت محدود توسط منحنی و محور Y ها (ب) $= \int_{t=a}^b |x(t)| |y'(t)| dt$

$$S = \int x dy = \int x(t) y'(t) dt$$

نکته: اگر منحنی برای $a \leq t \leq b$ پیموده شده در جهت مثلاًتانی باشد:

$$\text{مساحت} = \int_{t=a}^{t=b} x dy = - \int_{t=a}^{t=b} y dx$$



تمرین: (عمران ۹۵) مساحت محصور داخلی منحنی پارامتری زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x = 5 \cos(t) - \cos(5t) \\ y = 5 \sin(t) - \sin(5t) \end{cases}$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$45\pi \quad (۴)$$

$$30\pi \quad (۳)$$

$$15\pi \quad (۲)$$

$$5\pi \quad (۱)$$

حل $t=0 \Rightarrow x=4, y=0$ $t=2\pi \Rightarrow x=4, y=0$ مساحت بسته

$$y = 5 \sin t - \sin 5t \Rightarrow dy = 5 \cos t - 5 \cos 5t$$

$$S = \int x dy = \int_0^{2\pi} (5 \cos t - \cos 5t) (5 \cos t - 5 \cos 5t) dt$$

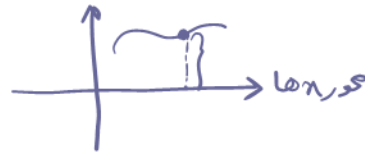


$$S = 2\pi \int R ds$$



نکته: اگر منحنی پارامتری حول محور x ها دوران کند مساحت جانبی جسم حاصل برابر است با:

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$



تمرین: (علوم کامپیوتر ۹۴) مساحت رویه حاصل از دوران منحنی $x = \frac{1}{8}(t - \sin(t))$ و $y = \frac{1}{8}(1 - \cos(t))$ حول محور x ها کدام است؟

$0 \leq t \leq 2\pi$

$\frac{5\pi}{3}$ (۴)

2π (۳)

$\frac{\pi}{2}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

$$\begin{aligned} \text{حل} \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{8}(1 - \cos t) \\ y' = \frac{1}{8} \sin t \end{cases} &\Rightarrow x'^2 + y'^2 = \frac{1}{64} \left((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \right) = \\ &= \frac{1}{64} (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{32} (1 - \cos t) = \frac{1}{32} \times 2 \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{16} \sin^2 \frac{t}{2} \Rightarrow ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{\frac{1}{16} \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{4} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt \end{aligned}$$

$$\text{مساحت حاصل از دوران} = 2\pi \int R ds = 2\pi \int_0^{2\pi} y \times \frac{1}{4} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt$$



$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = \frac{\pi}{8} \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \times \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{\pi}{8} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} (1 - \cos^2 \frac{t}{2}) dt = \frac{\pi}{8} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} dt$$

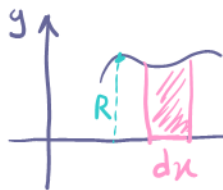
$$= \frac{\pi}{8} \left(-2 \cos \frac{t}{2} + 2 \times \frac{\cos^3 \frac{t}{2}}{3} \right)_0^{2\pi} = \frac{\pi}{3}$$





نکته: اگر مساحت محدود به منحنی پارامتری و محور x ها را حول محور x ها دوران دهیم حجم حاصل از دوران

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt$$



برابر است با: $\text{حجم} = \pi \int (\text{مساحت})^2 dx$

$$= \pi \int y^2 dx = \pi \int (y(t))^2 (x'(t)) dt$$

تمرین: (مکانیزاسیون ماشین‌های کشاورزی ۹۵) سطح محدود به منحنی پارامتری $(x = t^2 + t, y = t^2 - t)$ و

محور x ها را از $t = 0$ تا $t = 1$ حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل کدام است؟

$$dx = x' = (2t + 1) dt$$

$$\frac{\pi}{15} \quad (4) \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{12} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{10} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

حل

$$V = \pi \int_{t=0}^{t=1} y^2 x'(t) dt = \pi \int_0^1 (t^2 - t)^2 (2t + 1) dt$$





قضایای پاپوس

در بخش‌های قبل روش‌های محاسبه حجم و سطح حاصل از دوران حول محورهای مختصاتی یا خطوط موازی آنها بررسی شد. در حالت کلی برای محاسبات حجم و مساحت حاصل از دوران از قضایای پاپوس استفاده می‌کنیم.

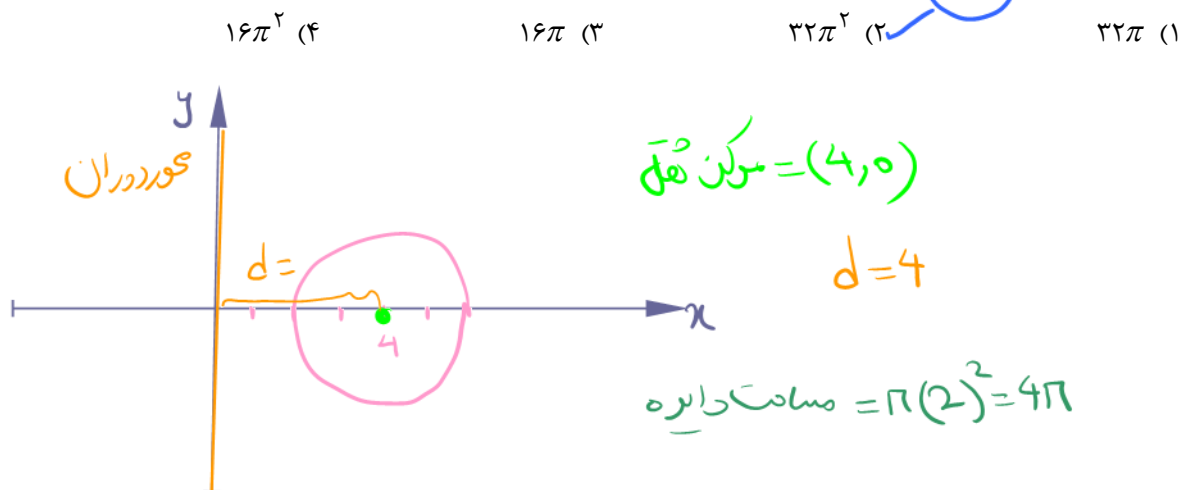
قضیه: (قضیه اول پاپوس) اگر ناحیه D در صفحه حول محوری که از داخل آن عبور نمی‌کند دوران کند حجم جسم حاصل از دوران برابر است با مساحت ناحیه D ضرب در محیط پیموده شده توسط مرکز هندسی ناحیه D . یعنی اگر فاصله مرکز هندسی تا محور دوران برابر d و مساحت آن A باشد:

$$A \times 2\pi d = (\text{فاصله مرکز هندسی ناحیه از محور دوران}) \times 2\pi \times (\text{مساحت ناحیه}) = \text{حجم}$$

قضیه: (قضیه دوم پاپوس) اگر منحنی C در صفحه حول محوری که آن را قطع نمی‌کند دوران کند، مساحت سطح ایجاد شده در اثر دوران برابر است با طول قوس C ضرب در محیط پیموده شده توسط مرکز هندسی منحنی C . یعنی اگر فاصله مرکز هندسی منحنی C تا محور دوران برابر d و طول آن l باشد:

$$l \times 2\pi d = (\text{فاصله مرکز هندسی خم از محور دوران}) \times 2\pi \times (\text{طول قوس خم}) = \text{مساحت سطح جانبی}$$

تمرین: (مکانیک ۹۹) حجم شکل حاصل از دوران دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز $(4, 0)$ حول محور y ها، کدام است؟



$$\text{حجم حاصل از دوران} = 2\pi d \times \text{مساحت}$$

$$\downarrow$$

$$4\pi \times 2\pi \times 4 = 32\pi^2$$



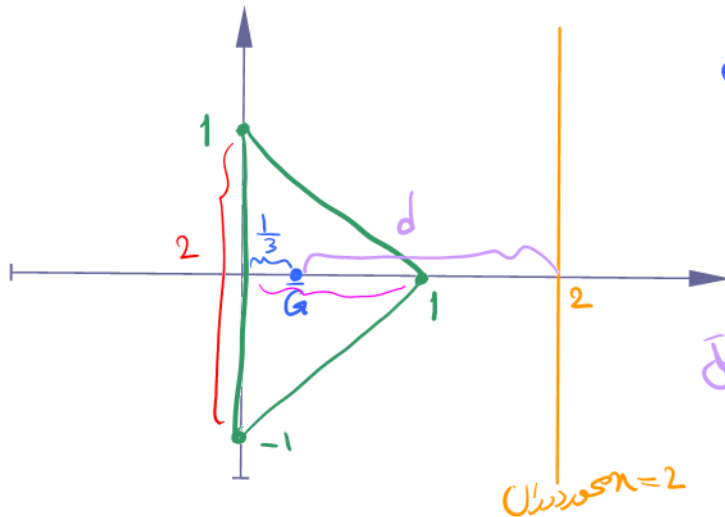
تمرین: (MBA ۸۸) حجم حاصل از دوران مثلث با رئوس $(0, 1)$ و $(0, -1)$ و $(1, 0)$ حول خط $x = 2$ برابر کدام است؟

$$\frac{7\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (3)$$

$$\frac{10\pi}{3} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{14\pi}{3} \quad (1)$$



$$\begin{aligned} \text{مرکز ثقل} \quad \bar{x} &= \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3} \\ \bar{y} &= \frac{0+(-1)+1}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$d = \text{فاصله مرکز ثقل از محور دوران} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

$$\text{حجم حاصل از دوران} = \text{مساحت} \times 2\pi d = 1 \times 2\pi \times \frac{5}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

