



(99 MBA) مساحت روبه استوانه‌ای $r = 1 + \cos \theta$ در بازه $\theta \in [0, \pi]$ و $1 < z < 3$ کدام است؟
 نصف دایره

2π (4)

4π (3)

8 (2)

4 (1)

حل $r = 1 + \cos \theta \Rightarrow ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta$

$$= \sqrt{2 + 2\cos \theta} d\theta = \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$ds = \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

روش اول $\text{مساحت} = \int (3-1) ds = \int_{\theta=0}^{\pi} 2 \left| 2 \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi}$

$$= 8$$

روش دوم $\text{مساحت} = \int (3-1) ds = \int 2 ds = 2 \int ds = 2 \times \frac{1}{2} (8 \times 1) = 8$
 طول قوس $a=1$
 $\because r = 1 + \cos \theta$
 حدود θ نصف دایره است

نکته $r = a(1 \pm \cos \theta)$ و $r = a(1 \pm \sin \theta) \Rightarrow \text{طول قوس} = 8a$





(صنایع ۱۴۰۱) ساحت بریده شده از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ توسط استوانه $x^2 + y^2 = ax$ حدالکته کوام است ؟

$$2(\pi-1)a^2 \quad (2)$$

$$2(\pi-2)a^2 \quad (1) \checkmark$$

$$(\pi-2)a^2 \quad (4)$$

$$(\pi-1)a \quad (3)$$

* در تمام سؤالاتی که ترکیب (کره + استوانه) داشته باشیم باید حواسمان به تقارن نسبت به صفحه xy باشد. یعنی اگر در صورت سؤال نکته باشد در بالای صفحه xy باید جواب را در ۲ ضرب کنیم

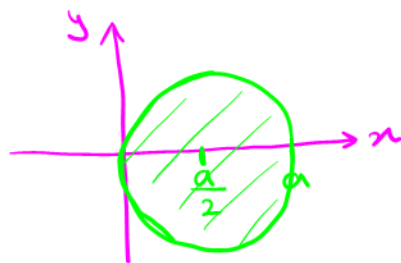
حل
$$\iint_D d\sigma = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r=a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta$$

D علامه استوانه

$$= a^2(\pi-2)$$

$$D: x^2 + y^2 = ax$$

$$r = a \cos \theta \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\int_{r=0}^{r=a \cos \theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr = a \times -\frac{1}{2} \times \frac{(a^2 - r^2)^{1/2}}{1/2} \bigg|_{r=0}^{r=a \cos \theta} = -a \left(\frac{a^2 - a^2 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta} \right)^{1/2} - a$$

$$= -a (|a \sin \theta| - a) = a^2 (1 - |\sin \theta|)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 (1 - |\sin \theta|) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (1 - \sin \theta) d\theta = 2a^2 (\theta + \cos \theta) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = a^2(\pi-2)$$





۵۷- (نساجی ۹۹) کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x, y, z) = e^y \vec{i} + (xe^y + z^2) \vec{j} + 2yz \vec{k}$ روی مسیر گذرا از

منحنی $C(t^2, 4t, t-1)$ در فاصله $(0, 1)$ در جهت مثبت، کدام است؟

$$e^4 \quad (4)$$

$$e^2 \quad (3)$$

$$e^{-2} \quad (2)$$

(1) صفر

$$\text{حل} \quad \text{curl}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^y & xe^y + z^2 & 2yz \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$t=0 \Rightarrow \text{ابتدا} = (0, 0, -1)$$

$\Rightarrow$ هم‌باز $\Rightarrow$ تابع پتانسیل

$$t=1 \Rightarrow \text{پایان} = (1, 4, 0)$$

$$\int e^y dx = xe^y$$

$$\int z^2 dy = z^2 y$$

$$\int \rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x, y, z) = xe^y + yz^2 + C$$

$$\text{حاصل} = F(1, 4, 0) - F(0, 0, -1) = e^4$$





۵۸- (نساجی ۹۵) فرض کنید C منحنی $\alpha(t) = ((1-t)\cos t, t^2+1, 2t+1)$ که $0 \leq t \leq 1$ باشد. اگر

$F(x, y, z) = (2x+z, z, y+x)$ باشد، مقدار $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (صفر)

-۱ (۱)

$$\text{حل} \quad \text{curl}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & z & y+x \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\text{curl}(F) = (0, 0, 0) \Rightarrow \text{میدان پتانسیل} \Rightarrow \text{تابع پتانسیل}$$

مسئله دامنه ندارم

$$\left. \begin{aligned} \int (2x+z) dx &= x^2 + xz \\ \int z dy &= zy \\ \int 0 dz &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x, y, z) = x^2 + xz + yz$$

$$\text{حاصل} = f(1, 1, 1) - f(0, 2, 3) = f(1, 1, 1) - f(0, 2, 3)$$

$$= (6) - (3) = 3$$





۵۹- (مواد ۹۵) جسمی تحت اثر نیروی $\vec{F} = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ روی مارپیچ $\vec{r} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t\vec{k}$ به سمت $0 \leq t \leq 2\pi$

بالا حرکت می نماید کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ ، کدام است؟

$\sqrt{\pi}$ (۱) $\sqrt{2\pi}$ (۲) 2π (۳) $2\pi^2$ (۴) ✓

ابتدا (۱, ۰, ۰) باز (۱, ۰, 2π)

حل)

$$\text{curl}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz & xz & xy \end{pmatrix} = (0, -2y, 2x) \neq (0, 0, 0)$$

$$\vec{r} = \int (-yz) dx + (xz) dy + (xy) dz$$

$$\begin{cases} x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt \\ y = \sin t \Rightarrow dy = \cos t dt \\ z = t \Rightarrow dz = dt \end{cases}$$

$$\vec{r} = \int (-t \sin t)(-\sin t dt) + (t \cos t)(\cos t dt) + (\cos t \sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) dt = \left. \frac{t^2}{2} - \frac{1}{4} \cos 2t \right|_0^{2\pi} = \left(2\pi^2 - \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} \right) = 2\pi^2$$



$$\int_{(a,b,c)}^{(m,n,p)} (F_1) dx + (F_2) dy + (F_3) dz$$



۶۰- (علوم کامپیوتر ۹۲) مقدار $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ به طوری که (x_1, y_1, z_1) روی کره

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و (x_2, y_2, z_2) روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ قرار دارد و $0 < a < b$ کدام است؟

(۴) $\sqrt{b+a}$

(۳) $\sqrt{b-a}$

(۲) $\sqrt{\frac{a}{b}}$

(۱) $b-a$

$$\underline{ح} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dy + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dz$$

نکته:

$$\vec{r} = (x, y, z) \Rightarrow F = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \Rightarrow \begin{cases} \text{curl}(F) = (0, 0, 0) \\ f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx = \int x (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل} &= f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1) = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ &= \sqrt{b^2} - \sqrt{a^2} = b - a \end{aligned}$$



۶۱- (عمران ۹۰) مقدار انتگرال $\oint_C xy dx + x^2 dy$ که در آن C منحنی بسته محدود به سهمی‌های $y = x^2$ و

$y^2 = x$ است که یک بار در جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است برابر است با:

$$\frac{3}{5} \quad (۴)$$

$$\frac{27}{20} \quad (۳)$$

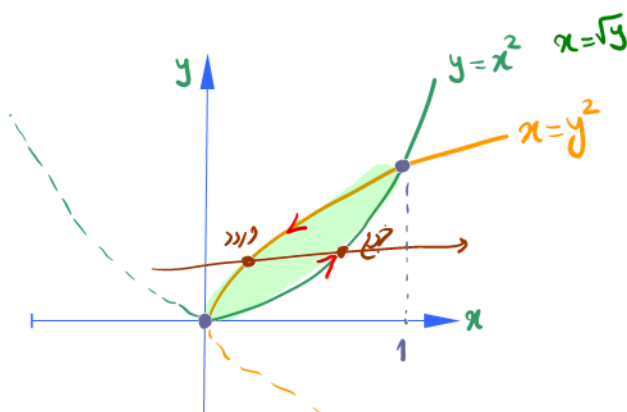
$$\frac{1}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{20} \quad (۱) \checkmark$$

گزینه $\Rightarrow$ هم‌نسبت + برابرست

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x$$



$$\text{حاصل اسکالر} = \iint_D (2x - x) dx dy = \iint_D x dx dy$$

سوازی مختص

$$\text{اسکالر داخلی} = \int_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2} ((\sqrt{y})^2 - (y^2)^2) = \frac{1}{2} (y - y^4)$$

$$\text{اسکالر بیرونی} = \int_{y=0}^{y=1} \frac{1}{2} (y - y^4) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{20}$$



۶۲- (عمران - نقشه برداری ۹۲) فرض کنید C دایره $r = 1 - \cos \theta$ و در جهت مثلثاتی باشد. در این صورت مقدار

انتگرال زیر، برابر کدام است؟

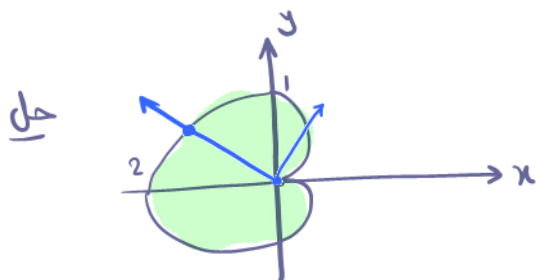
$$\int_C \underbrace{(x^2 - y)}_{F_1} dx + \underbrace{(3x - 2y^2)}_{F_2} dy$$

6π (۴)

3π (۳)

-3π (۲)

-6π (۱)



θ	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	۰	۱	۲	۱	۰

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F_2}{\partial x} = 3 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{گین} \Rightarrow \text{هم‌نسبت} + \text{برابر نیست}$$

ردیف اول

$$\iint_D 3 - (-1) \, dx \, dy = 4 \iint_D dx \, dy = 4 \times \text{مساحت دایره}$$

$$= 4 \times \frac{3}{2} \pi (1)^2 = 6\pi$$

نکته: $\left. \begin{array}{l} r = a(1 \pm \cos \theta) \\ r = a(1 \pm \sin \theta) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مساحت} = \frac{3}{2} \pi a^2$

ردیف دوم

$$\iint 4 \, dx \, dy = 4 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1-\cos \theta} r \, dr \, d\theta$$

ردیف سوم

$$4 \iint dx \, dy = 4 \times \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \, d\theta$$



۶۳- (علوم کامپیوتر ۹۱) فرض کنید γ مرز دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع R در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

(جهت مثبت) است. اگر $\vec{F} = (F_1, F_2)$ میدان برداری باشد که $F_1 = \frac{-y}{x^2 + y^2} - 2y + e^{x^2}$ و

$F_2 = \frac{x}{x^2 + y^2} + x + \tan y^2$ در این صورت $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است؟

$\pi(2R^2 + 2)$ (۴)

$\pi(3R^2 + 2)$ (۳) ✓

$\pi(R^2 + 1)$ (۲)

2π (۱)



$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} (-2y + e^{x^2}) \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + x + \tan y^2 \right) dy$$

$$= \int \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + \int (-2y + e^{x^2}) dx + (x + \tan y^2) dy$$

دایره حلقه سبز
بیاری سبز

$2\pi + 3\pi R^2$

حاصل

$$\int \underbrace{(-2y + e^{x^2})}_{F_1} dx + \underbrace{(x + \tan y^2)}_{F_2} dy = \iint (1 - (-2)) dx dy = 3 \times \text{مساحت دایره} = 3\pi R^2$$

کنیم $\Rightarrow$ هم‌بسته + برابر هستند $\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} = -2$ و $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$



انتگرال سطح

۶۴- (صنایع - سیستم ۹۴) فرض کنید S سطح ناحیه‌ای باشد که $2x + 3y + z = 6$ از ربع اول جدا می‌کند و

$f(x, y, z) = x + y$ می‌باشد. مقدار $\iint_S f \, ds$ ، کدام است؟

$4\sqrt{14}$ (۴)

$5\sqrt{14}$ (۳) ✓

$3\sqrt{14}$ (۲)

$2\sqrt{14}$ (۱)

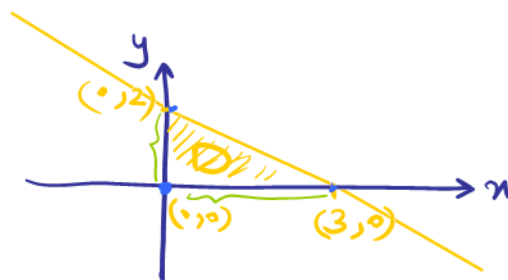
حل $\iint (x+y) \, ds$

$S: 2x + 3y + z = 6 \Rightarrow z = 6 - 2x - 3y \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \underbrace{(-2)^2}_{\text{مربع } x} + \underbrace{(-3)^2}_{\text{مربع } y}} \, dx \, dy$

$ds = \sqrt{14} \, dx \, dy$

$\iint_D (x+y) \sqrt{14} \, dx \, dy$

$D: \begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y = 6$



$= \sqrt{14} \left(\iint_D x \, dx \, dy + \iint_D y \, dx \, dy \right)$

$= \sqrt{14} \left(\bar{x} \times \text{مساحت} + \bar{y} \times \text{مساحت} \right)$

$= \sqrt{14} \left(1 \times 3 + \frac{2}{3} \times 3 \right) = 5\sqrt{14}$

$\begin{cases} \bar{x} = \frac{0+3+0}{3} = 1 \\ \bar{y} = \frac{0+0+2}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\text{مساحت} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$





۶۵- (مهندسی نفت ۹۲) فرض کنید رویه S بخشی از صفحه $3x + 4y + 12z = 1$ است که داخل استوانه

چراغ‌بند

$x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. مساحت رویه برابر کدام است؟

$$\frac{13\pi}{3} \quad (4)$$

$$\frac{13\pi}{5} \quad (3)$$

$$\frac{4\pi}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4\pi}{5} \quad (1)$$

مساحت مسطح $\Rightarrow ds$

ج. $S: 3x + 4y + 12z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{12}$

$$ds = \sqrt{1 + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}_{\text{مشتق } x} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}_{\text{مشتق } y}} \, dx \, dy = \frac{13}{12} dx \, dy$$

$$مساحت = \iint ds = \iint \frac{13}{12} dx \, dy = \frac{13}{12} \times \text{مساحت دایره} = \frac{13}{12} \pi (1)^2 = \frac{13\pi}{12}$$

$D: x^2 + y^2 = 1$ معادله استوانه

(هیچ گزینه‌ای صحیح نیست)





جدا کننده

۶۶- (عمران - نقشه برداری ۹۱) مساحت عرقچینی که صفحه $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ از بالای کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ جدا می کند

کره ← کره از بعد کره

برابر است با:

$$\pi(\sqrt{2}+2) \quad (۴)$$

$$\pi(2-\sqrt{2}) \quad (۳)$$

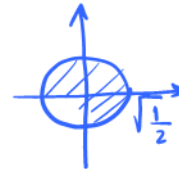
$$2\pi\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

$$\text{حل} \quad d\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dx dy$$

$$\text{مساحت عرقچین} = \iint_D d\sigma = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dx dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta$$

$$D: \begin{cases} z = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$



$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \times \int_{r=0}^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \underbrace{r (1-r^2)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{سبب}} dr$$

$$= 2\pi \times \cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} = -2\pi \sqrt{1-r^2} \Big|_{r=0}^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$= -2\pi \left(\sqrt{1-\frac{1}{2}} - \sqrt{1-0} \right) = -2\pi \left(\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \right)$$





۶۷- (مکانیک ۹۹) فرض کنید S سطح خارجی ناحیه‌ای باشد که توسط صفحه $z=0$ رویه $z=4-x^2-y^2$ ،

محصور شده است. اگر $\vec{F}(x, y, z) = (x^3 + \cos(y^3 + z^3), y^3 + \sin(x^3 + z^3), x^3 + y^3)$ باشد، شار

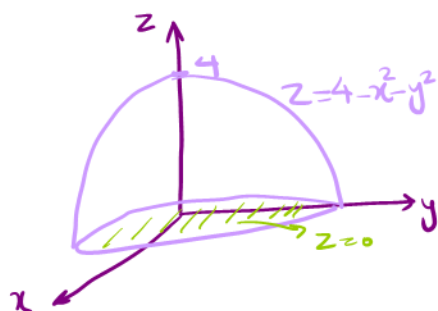
گذرا از سطح S توسط نیروی $\vec{F}$ کدام است؟

۳۴π (۴)

۳۲π (۳) ✓

۱۷π (۲)

۱۶π (۱)



$\text{div} \Rightarrow \text{سطح} + \text{شار}$

$$\text{div}(\vec{F}) = 3x^2 + 3y^2 + 0$$

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{سطح} \quad \iiint \text{div}(\vec{F}) = \iiint 3(x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int \int \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} 3(x^2 + y^2) \, dz \, dx \, dy = \int \int 3(x^2 + y^2)(4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

$$D: \begin{cases} z=0 \\ z=4-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow 4-x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2=4$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 3r^2(4-r^2)r \, dr \, d\theta = 2\pi \times \int_{r=0}^2 (12r^3 - 3r^5) \, dr = 2\pi \left(3r^4 - \frac{r^6}{2} \right) \Big|_{r=0}^2$$

$$= 2\pi(48 - 32) = 32\pi$$





۶۸- (معدن ۹۹) فرض کنید S سطح بسته واقع بر نیمکره بالایی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحه xy باشد اگر

مقدار $\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ ، کدام است؟ $\vec{F}(x, y, z) = e^{y^2} \vec{i} + (y + \sin z^2) \vec{j} + (z - 1) \vec{k}$

$$\frac{2}{3}\pi \quad (۴)$$

$$\frac{4}{3}\pi \quad (۳) \quad \checkmark$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\pi \quad (۱)$$

$$\text{ج} \quad \text{div}(\vec{F}) = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\oiint_{\vec{S}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint \text{div}(\vec{F}) = \iiint 2 \, dx \, dy \, dz$$

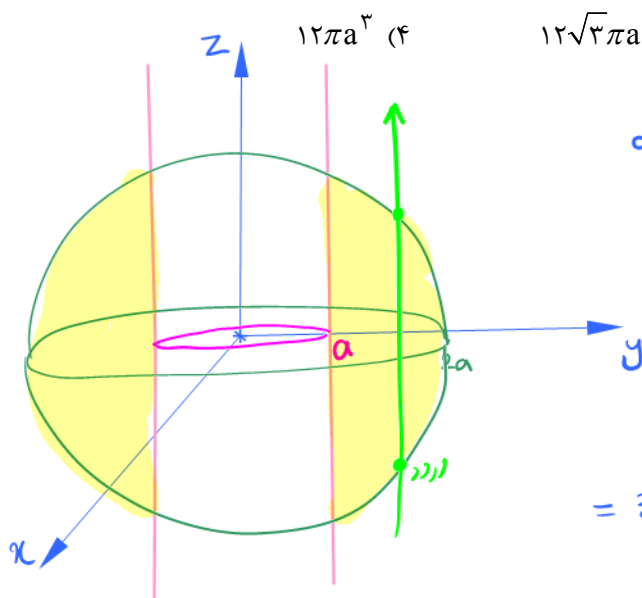
$$= 2 \times \text{حجم نیمکره} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi (1)^3$$

$$= \frac{4\pi}{3}$$

۶۹- (مهندسی نفت ۹۴) فرض کنیم D ناحیه محدود بین کره $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ و استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ باشد

و S سطح ناحیه D ، اگر $\vec{F} = (\sqrt{3}x + y \sin z)\vec{i} + (\sqrt{3}y + x \sin z)\vec{j} + (\sqrt{3}z + xy \cos xy)\vec{k}$ یک میدان

بردار باشد. در آن صورت شار رو به بیرون از سطح S توسط $\vec{F}$ کدام است؟



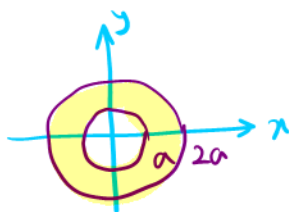
$$\text{div } \vec{F} = \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{شار} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_D \text{div}(\vec{F}) dV$$

سطح بسته

$$= 3\sqrt{3} \int \int \int_{z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz \, dx \, dy$$

$$= 3\sqrt{3} \int \int_D 2\sqrt{4a^2-x^2-y^2} \, dx \, dy$$



$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4a^2 \end{cases}$$

$$= 6\sqrt{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{2a} \sqrt{4a^2-r^2} \, r \, dr \, d\theta = 6\sqrt{3} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \times \int_{r=a}^{2a} r(4a^2-r^2)^{1/2} \, dr$$

$$= 6\sqrt{3} \times 2\pi \times -\frac{1}{2} \times \frac{(4a^2-r^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_a^{2a} = -4\pi\sqrt{3} \left(0 - (3a^2)^{3/2} \right) = 4\pi\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} a^3 = 36\pi a^3$$



سطح باز

(ژئومتریک ۹۵) اگر $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} - x^2\vec{j} + (x+z)\vec{k}$ و S کبی از معنی

$x+y+\frac{1}{2}z=3$ در $\frac{1}{8}$ ادا فضا $\vec{n}$ مانم یک رویه بالی سطح باسد

$\vec{n}$ رو به بالا $\leftarrow$ مؤلفه $\vec{n}$ (یعنی z) باید + باسد

کدام است؟

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

مقدار

$$9(4) \checkmark$$

$$\frac{4}{9}(3)$$

$$\frac{2}{4}(2)$$

$$\frac{2}{2}(1)$$

$$S: x+y+\frac{1}{2}z=3 \Rightarrow g(x,y,z)=x+y+\frac{1}{2}z-3=0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{n} dS = \pm \frac{\nabla g}{|\frac{\nabla g}{|\frac{\partial g}{\partial z}}|} dx dy = \pm \frac{(1, 1, \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} dx dy$$

$$\vec{n} dS = (2, 2, 1) dx dy$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint (x, -x^2, x+z) \cdot (2, 2, 1) dx dy$$

$$= \iint (2x - 2x^2 + x + z) dx dy = \iint (2x - 2x^2 + x + 6 - 2x - 2y) dx dy$$

در انتگرال ریاضی و روی سطح صاف در داخل انتگرال
از تقاطع خط با سطح برای مقدار امانی اسفاره ی کنیم

$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{2}z=3 \\ z=6-2x-2y \end{cases}$$

$$= \iint_D (x - 2x^2 - 2y + 6) dx dy = \iint x dx dy - 2 \iint x^2 dx dy - 2 \iint y dx dy + 6 \iint dx dy$$

$$(\bar{x} \times \bar{y}) = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(\bar{y} \times \bar{z}) = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x+y+\frac{1}{2}z=3 \Rightarrow x+y=3$$

$$\bar{x} = \frac{0+3+0}{3} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{0+0+3}{3} = 1$$

$$\bar{z} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$



$$= \frac{45}{2} - 2 \int_{y=0}^3 \int_{x=0}^{3-y} x^2 dx dy = \frac{45}{2} - 2 \int_0^3 \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{3-y} dy =$$

$$= \frac{45}{2} - \frac{2}{3} \int_0^3 (3-y)^3 dy = \frac{45}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{(3-y)^4}{4} \Big|_0^3 = \frac{45}{2} - \frac{27}{2} = 9$$



Nogamath



Nogamcenter



GMATmaster



۰۲۱۶۶۹۵۴۹۲۲



تقریباً. اگر سطح بیرونی کره به معادله $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ باشد آنگاه حاصل

$$\iint \vec{r}^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$$

چند است؟

$$\vec{F} = (x^2, y^2, z^2) \Rightarrow \text{div}(\vec{F}) = 2x + 2y + 2z$$

$$\text{حاصل} = \iiint \text{div}(\vec{F}) = \iiint (2x + 2y + 2z) dx dy dz$$

نکته: در انتگرال سه گانه مختصات کروی در صورتی مناسب است که مرکز کره مبدأ مختصات یا روی محور z ها باشد. در سایر موارد باید تغییر مختصات داده و سپس حل کنیم.

$$\begin{cases} u = x-1 \Rightarrow x = u+1 \\ v = y-2 \Rightarrow y = v+2 \\ w = z-3 \Rightarrow z = w+3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{J} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

$$\iiint_{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1} 2(x+y+z) dx dy dz = \iiint_{R'} 2(u+1 + v+2 + w+3) \times 1 du dv dw$$

$R': u^2 + v^2 + w^2 = 1$
کره

$$= 2 \iiint_{R'} (u+v+w+6) du dv dw = 2 \iiint 6 du dv dw = 12 \times \text{حجم کره}$$

$$= 12 \times \frac{4}{3} \pi (1)^3 = 16\pi$$

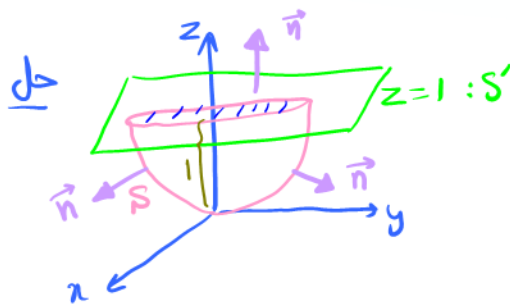


(نفسه برداری ۹۳) ساز میدان $\vec{F} = 4x\vec{i} + 4y\vec{j} + 2\vec{k}$ بر روی سطحی که مماسی از

$z = x^2 + y^2$ زیر صفحه $z=1$ است. جهت آن روی محور z مثبت باشد.

$\frac{\pi}{2}$ π $\frac{4\pi}{3}$ 2π کدام است؟

$$\text{div } F = 4 + 4 + 0 = 8$$



$$\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \stackrel{\text{دوره ۹۳}}{=} \iiint_{S'} \text{div } F \, dV = \iiint_{S'} 8 \, dV = 8 \times \text{حجم مکعب} = 8 \times \frac{1}{2} \times \text{مربع} \times \text{ارتفاع}$$

$$= 8 \times \frac{1}{2} \pi (1)^2 \times 1 = 4\pi$$

ساز S و S'

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\int \int_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = ?$$

$$S': z=1 \Rightarrow g(x, y, z) = z - 1 = 0$$

$$\vec{n} \, dS = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \, dx \, dy = \frac{(0, 0, 1)}{1} \, dx \, dy = (0, 0, 1) \, dx \, dy$$

$$\int \int_{S'} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int \int (4x, 4y, 2) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy = \int \int 2 \, dx \, dy = 2 \times \text{مساحت} = 2\pi$$

$$\text{مطلوب} = \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$





۷۰- (نقشه برداری ۹۶) اگر s رویه $z = 9 - x^2 - y^2$ برای $z > 0$ و c منحنی حاصل از برخورد s با صفحه xy و

$F(x, y, z) = (-y, x, \sin(x^2 y^2 z^2))$ باشد، آنگاه $\iint_S \text{curl} F \cdot ds$ برابر است با:

72π (۴)

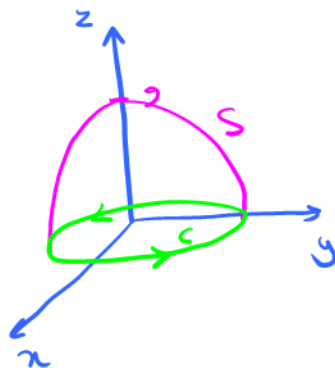
36π (۳)

18π (۲)

9π (۱)

حل $\vec{n} ds = ?$

$z=0 \Rightarrow \vec{n} ds = (0, 0, 1) dx dy$



$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & -1 \end{pmatrix} = (\dots, \dots, 2)$$

$$\iint \text{curl} F \cdot \vec{n} ds = \iint (\dots, \dots, 2) \cdot (0, 0, 1) dx dy$$

$$= 2 \times \iint_D dx dy = 2 \times \text{مساحت دایره} = 2 \times \pi (3)^2 = 18\pi$$

$$D: \begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$





۷۱- (عمران - نقشه برداری ۹۵) اگر $\vec{F}$ و C به صورت زیر باشند، حاصل $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است؟

$$\vec{F} = (xe^x + y)\vec{i} - (y^2 + z)\vec{j} + (ze^z + 2x)\vec{k}$$

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

استوانه
صفحه

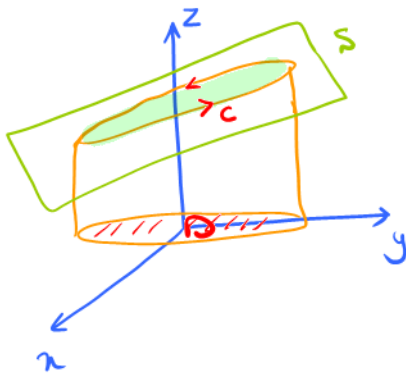
$$-4\pi \quad (4)$$

$$-2\pi \quad (3)$$

$$-\pi \quad (2)$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

حل $\text{curl}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xe^x + y & -y^2 - z & ze^z + 2x \end{pmatrix} = (1, -2, -1)$



$$S: x + y + z = 1 \Rightarrow g: x + y + z - 1 = 0$$

$$\vec{n} \, ds = \pm \frac{\nabla g}{|\frac{\nabla g}{\frac{\partial g}{\partial z}}|} \, dx \, dy \quad (\text{فرمول})$$

$$\vec{n} \, ds = \pm \frac{(1, 1, 1)}{1} \, dx \, dy$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{استوکس}}{=} \iint_S \text{curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds = \iint_D (1, -2, -1) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy$$

$$= \iint_D (1 - 2 - 1) \, dx \, dy = -2 \times \text{مساحت} = -2 \times \pi (1)^2 = -2\pi$$

دایره سطح مقطع استوانه





۷۲- (نساجی ۹۴) اگر $\vec{F} = \langle xz, xy, 3xz \rangle$ و C مرز بخشی از صفحه $2x + y + z = 2$ در یک هشتم اول و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت وقتی از بالا مشاهده می‌شود پیموده شده باشد، مقدار

انتگرال $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است؟

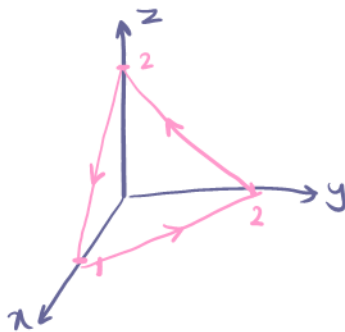
۳ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

-۳ (۱)

حل) $\text{curl}(F) = (0, x-3z, y) \neq (0, 0, 0)$



$$\vec{n} ds = ?$$

$$S: 2x + y + z = 2 \Rightarrow g(x, y, z) = 2x - y - z - 2 = 0$$

$$\vec{n} ds = \pm \frac{\nabla g}{|\frac{\nabla g}{\frac{\partial g}{\partial z}}|} dx dy = \frac{(2, -1, -1)}{|-1|} dx dy$$

$$\vec{n} ds = (2, -1, -1)$$

$$\text{curl}(F) = (0, x-3z, y)$$

$$\iint \text{curl}(F) \cdot \vec{n} ds = \iint (0, x-3z, y) \cdot (2, -1, -1) = \iint (-x + 3z - y) dx dy$$

$2x + y + z = 2$

$$= \iint (-x + 3(2 - 2x - y) - y) dx dy = \iint (7x + 4y - 6) dx dy$$

D

$$D: 2x + y + z = 2 \Rightarrow z=0 \Rightarrow 2x + y = 2$$





۷۲- (نساجی ۹۴) اگر $\vec{F} = \langle xz, xy, 3xz \rangle$ و C مرز بخشی از صفحه $2x + y + z = 2$ در یک هشتم اول و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت وقتی از بالا مشاهده می‌شود پیموده شده باشد، مقدار

انتگرال $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است؟

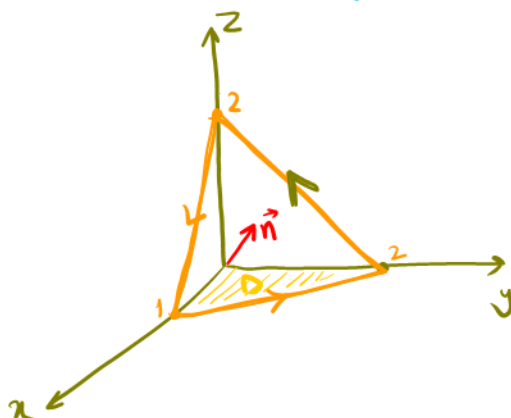
۳ (۴)

-۱ (۳)

۲ (۲)

-۳ (۱)

ج $\text{curl}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{pmatrix} = (0, x-3z, y) \neq (-, 0, 0)$



$$2x + y + z = 2$$

$$(0, 0, 2), (0, 2, 0), (1, 0, 0)$$

$$S: g = 2x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow \nabla g = (2, 1, 1) \Rightarrow \vec{n} ds = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} dx dy$$

$$\vec{n} ds = \frac{(2, 1, 1)}{1} dx dy$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \text{curl}(\vec{F}) \cdot \vec{n} ds = \iint_D (0, x-3z, y) \cdot (2, 1, 1) dx dy$$

$$= \iint_D (x-3z+y) dx dy = \iint_D (x-3(2-2x-y)+y) dx dy$$

$$2x+y+z=2$$

$$z = 2 - 2x - y$$

$$= \iint_D (7x+4y-6) dx dy = 7 \iint_D x dx dy + 4 \iint_D y dx dy - 6 \times D_{\text{area}}$$

$$= 7 \times \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + 4 \left(\frac{2}{3} \times 1\right) - 6 = -1$$

۷۴



Nogammath



Nogamcenter



GMATmaster



۰۲۱۶۶۹۵۴۹۲۲

$$D_{\text{area}}: \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

$$\bar{x} = \frac{0+1+0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{0+0+2}{3} = \frac{2}{3}$$





۷۳- (مهندسی صنایع ۹۵) مقدار $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است؟ اگر $F = (e^{x^2} + y, \sin y^2 - z, z^5 - 2x)$ و C منحنی

فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 2$ و صفحه $3x + 3y + z = 4$ باشد، که در جهت مثلثاتی طی شده است.

۱۶π (۴) ✓

۸π (۳)

۴π (۲)

۲π (۱)

ح $\text{curl}(F) = (1, 2, -1) \neq (0, 0, 0)$

$$S: g: 3x + 3y + z - 4 = 0 \Rightarrow \nabla g = (3, 3, 1)$$

$$\vec{n} ds = \pm \frac{(3, 3, 1)}{1} dx dy$$

$$\int F \cdot dr = \iint \text{curl}(F) \cdot \vec{n} ds = \iint (1, 2, -1) \cdot (3, 3, 1) dx dy$$

$$= \iint (3 + 6 - 1) dx dy = 8 \times \text{مساحت}$$

$$= 8 \times \pi (\sqrt{2})^2 = 16\pi$$

$$D: \text{استوانه } x^2 + y^2 = 2$$

